**Phụ lục Cơ sở toán học**

**Giới thiệu**

Việc phân tích các thuật toán thường đòi hỏi chúng ta phải sử dụng các công cụ toán học. Một vài trong số những công cụ này đơn giản như đại số cấp ba, nhưng một số khác có lẽ là khá mới mẻ đối với các bạn. Trong phần I, chúng ta đã thấy cách để vận dụng các khái niệm tiệm cận và giải quyết các phép truy toán. Phụ lục này là một bản tóm tắt một vài khái niệm khác và các phương pháp chúng ta sử dụng để phân tích các thuật toán. Như đã lưu ý trong phần giới thiệu trong phần I, bạn có thể đã thấy nhiều tài liệu trong phụ lục này trước khi đọc cuốn sách này (mặc dù các quy ước đặc biệt mang tính khái niệm chúng ta sử dụng có thể khác trong các cuốn sách khác). Do đó, bạn nên coi phần phụ lục này như một phần tham khảo. Tuy nhiên, như trong phần còn lại của quyển sách này, chúng ta đã đưa thêm các bài tập và bài toán dành cho bạn để phát triển kỹ năng trong lĩnh vực này.

Phụ lục A đưa ra các phương pháp để tính tổng và giới hạn tổng, chúng thường xảy ra trong phân tích các thuật toán. Nhiều công thức trong chương này có thể được thấy trong các bài tính toán, nhưng bạn sẽ thấy nó thích hợp để các phương pháp này được biên dịch ở một vị trí.

Phụ lục B chứa các định nghĩa và khái niệm cơ bản về tập hợp, quan hệ, hàm , đồ thị và cây. Chương này cũng đưa ra một vài tính chất của các đối tượng toán học này.

Phụ lục C bắt đầu bằng các nguyên lý cơ bản tính toán: phép hoán vị, tổ hợp, ... Phần còn lại của chương chứa các định nghĩa và tính chất của xác suất cơ sở. Phần lớn các thuật toán trong quyển sách này không cần lý thuyết xác suất để phân tích, và do vậy bạn có thể bỏ qua các phần còn lại của chương trong lần đọc đầu tiên, mà không thèm lướt qua. Sau đó, khi bạn gặp một phân tích có khái niệm về xác suất mà bạn cần biết rõ hơn, bạn sẽ thấy phụ lục C được tổ chức tốt cho mục đích tham khảo.

**A – Tổng**

Khi một thuật toán có một điều khiển lặp được xây dựng như một vòng lặp **while** hoặc **for**, thời gian chạy của nó có thể được biểu diễn như tổng của thời gian chạy trên mỗi dòng lệnh của thân của vòng lặp. Ví dụ, chúng ta thấy trong phần 2.2 rằng lần lặp thứ j của việc sắp xếp chèn mất thời gian tỷ lệ với j trong trường hợp tồi nhất. Bằng cách thêm vào thời gian cho mỗi vòng lặp, chúng ta đạt được tổng (hay chuỗi số)



Tính tổng này sinh ra một cận Θ(n2) trong trường hợp xấu nhất của thuật toán. Ví dụ này chỉ ra tầm quan trọng của việc hiểu cách tính và giới hạn các tổng.

Phần A.1 liệt kê một vài công thức cơ bản liên quan đến tổng. Phần A.2 đưa ra các kỹ thuật hữu ích cho việc giới hạn tổng. Các công thức trong phần A.1 được cho mà không chứng minh, mặc dù chứng minh cho một số trong số đó được đưa ra trong phần A.2 để minh hoạ phương pháp của phần đó. Phần lớn các chứng minh khác có thể được thấy trong các bài viết tính toán.

**A1. Công thức tổng và tính chất**

Cho một dãy a1, a2, ... các số, tổng giới hạn a1 + a2 + ... + an, trong đó n là một số nguyên không âm, có thể được viết dưới dạng



Nếu n = 0, giá trị của tổng được định nghĩa là 0. Giá trị của một chuỗi giới hạn luôn luôn được định nghĩa, và các số hạng của nó có thể được thêm vào một cách tuỳ ý.

Cho một dãy a1, a2, ... các số, tổng vô hạn a1 + a2 + ... có thể được viết dưới dạng



Nó được hiểu dưới dạng



Nếu giới hạn không tồn tại, dãy số là phân kỳ; ngược lại nó là hội tụ. Các số hạng của một dãy hội tụ không thể thêm vào một cách tuỳ ý. Tuy nhiên chúng ta có thể sắp xếp lại các số hạng của một hội tụ tuyệt đối, đó là, một dãy mà ở đó  hội tụ.

**Tính chất tuyến tính**

Với số c tuỳ ý và một dãy giới hạn a1, a2, ..., an và b1, b2, ..., bn,



Tính chất tuyến tính tuân theo chuỗi hội tụ vô hạn.

Tính chất tuyến tính có thể được sử dụng để tính các tổng có liên quan đến khái niệm tiệm cận. Ví dụ



Trong phương trình này, khái niệm Θ phía bên trái áp dụng cho biến k, trừ phía bên tay phải, nó áp dụng cho n. Những sự thực hiện này có thể được áp dụng cho dãy hội tụ vô hạn.

**Chuỗi số học**

Tổng



là một chuỗi số học và có giá trị

|  |  |
| --- | --- |
|  | (A.1) |
| . | (A.2) |

**Tổng bình phương và lập phương**

Chúng ta có các tổng bình phương và lập phương:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (A.3) |
|  | (A.4) |

**Chuỗi hình học**

Với số thực x ≠ 1, tổng



là một chuỗi hình học hay chuỗi mũ và có giá trị

|  |  |
| --- | --- |
|  | (A.5) |

Khi tổng là vô hạn và , chúng ta có chuỗi hình học giảm

|  |  |
| --- | --- |
|  | (A.6) |

**Chuỗi điều hoà**

Với số nguyên dương n, số điều hoà bậc n được định nghĩa



=

|  |  |
| --- | --- |
|  | (A.7) |

(Chúng ta sẽ chứng minh giới hạn này trong phần A.2)

**Chuỗi tích phân và vi phân**

Các công thức khác có thể có được bằng cách tính tích phân hoặc đạo hàm các công thức ở trên. Ví dụ, bằng cách đạo hàm cả hai vế của chuỗi hình học vô hạn (A.6) và nhân với x, chúng ta được

|  |  |
| --- | --- |
|  | (A.8) |

với .

**Chuỗi thu gọn**

Với mọi dãy a0, a1, ..., an­,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (A.9) |

vì mỗi số hạng a1, a2, ..., an-1 được cộng chính xác một lần và trừ chính xác một lần. Chúng ta nói rằng tổng thu gọn. Một cách tương tự



Như một ví dụ của tổng thu gọn, xét chuỗi



Ví chúng ta có thể viết lại mỗi số hạng như sau



chúng ta có





**Tích**

Tích hữu hạn a1a2...an có thể được viết dưới dạng

,

Nếu n = 0, giá trị của tích được định nghĩa là 1. Chúng ta có thể chuyển công thức tích thành một công thức tổng bằng cách sử dụng đồng nhất thức



**Bài tập**

***A.1 -1***

Tìm một công thức đơn giản cho 

***A.1-2 ★***

Chỉ ra rằng bằng cách tính chuỗi điều hoà.

***A.1-3***

Chỉ ra rằng với 0 < |x| < 1.

***A.1-4 ★***

Hãy chỉ ra rằng .

***A.1-5 ★***

Tính tổng 

***A.1-6***

Chứng minh rằng bằng cách sử dụng tính chất tuyến tính của tổng.

***A.1-7***

Tính tích 

***A.1-8 ★***

Tính tích 

**A.2 Giới hạn tổng**

Có nhiều kỹ thuật để tính giới hạn tổng được thể hiện thời gian chạy của thuật toán. Sau đây là một số phương pháp phổ biến nhất.

**Phương pháp quy nạp toán học**

Cách cơ bản nhất để tính một chuỗi số là sử dụng phương pháp quy nạp toán học. Ví dụ, chúng ta cần chứng minh rằng chuỗi số học  có giá trị . Chúng ta có thể dễ dàng kiểm tra điều này với n = 1, vì vậy chúng ta có thể giả thiết quy nạp rằng điều này đúng với n và chứng minh rằng nó đúng với n + 1. Chúng ta có



= 

= 

Một người không cần đoán giá trị chính xác của một tổng để sử dụng phương pháp quy nạp toán học. Quy nạp có thể được sử dụng để chỉ ra giới hạn. Ví dụ, chúng ta cần chứng minh rằng chuỗi hình học là O(3n). Đặc biệt hơn, chúng ta chứng minh rằng ≤ c3n với một hằng số c nào đó. Với điều kiện ban đầu n = 0, chúng ta có = 1 ≤ c.1 khi c ≥ 1. Giả sử rằng giới hạn đúng với n, chúng ta hãy chứng minh rằng nó đúng với n + 1. Chúng ta có





khi (1/3+1/c) ≤ 1 hoặc một cách tương đương, c ≥ 3/2. Do đó, , như chúng ta mong muốn.

Chúng ta phải cẩn thận khi sử dụng khái niệm tiệm cận để chứng minh các giới hạn bằng phương pháp quy nạp. Chúng ta hãy xem xét chứng minh sai Hiển nhiên,  Giả sử điều này đúng với n, chúng ta sẽ chứng minh điều này với n + 1:



 ⇐ sai!!

= O(n+1)

Sai lầm trong lý luận là ở chỗ “hằng số” được dấu bởi “chữ ô lớn” lớn dần lên cùng với n và do đó nó không là hằng số. Chúng ta không biết được rằng hằng số đều như nhau đối với mọi n.

**Giới hạn các số hạng**

Đôi khi, một cận trên tốt trên một chuỗi có thể đạt được bằng cách giới hạn mỗi số hạng của chuỗi, nó thường hiệu quả để sử dụng các số hạng lớn hơn để giới hạn các phần tử khác. Ví dụ, một giới hạn trên cho chuối số học (A.1) là



= n2.

Nói chung, với một chuỗi , nếu chúng ta đặt amax = max1 ≤ k ≤ n ak, khi đó



Phương pháp giới hạn mỗi số hạng trong một chuỗi bởi số hạng lớn nhất là một cách rất yếu khi chuỗi có thể không thật sự được giới hạn bởi một chuỗi hình học. Cho chuỗi , giả sử rằng ak+1/ak ≤ r với mọi k ≥ 0, ở đó 0 < r < 1 là một hằng số. Tổng có thể được giới hạn bằng một chuỗi hình học giảm vô hạn, vì ak ≤ a0 rk, và do đó





Chúng ta có thể áp dụng phương pháp này để giới hạn tổng  Số hạng đầu tiên (a0) là 1/3, và tỷ lệ (r) của chuỗi kết quả liên tục là





với mọi k ≥ 0. Do đó, chúng ta có





Một lỗi phổ biến trong việc áp dụng phương pháp này là chỉ ra rằng tỷ lệ của các số hạng liên tục là nhỏ hơn 1 và khi đó để giả sử rằng tổng được giới hạn bởi một chuỗi hình học. Một ví dụ là một chuỗi điều hoà vô hạn, nó phân kỳ vì





Tỷ lệ của các số hạng thứ k và k + 1 trong chuỗi này là k/(k+1) < 1, nhưng chuỗi không được giới hạn bởi một chuỗi hình học giảm. Để giới hạn một chuỗi bởi một chuỗi hình học, ta phải chỉ ra rằng có một số r < 1, nó là hằng số, sao cho tỷ lệ của tất cả các cặp của các toán hạng liên tục không bao giờ vượt quá r. Trong chuỗi điều hoà, không có số r nào như vậy vì tỷ lệ trở thành gần 1 một cách tuỳ ý.

**Phân tách tổng**

Một cách để có được giới hạn cho một tổng khó tính và biểu diễn chuỗi như tổng của của hai hay nhiều hơn các chuỗi bằng cách phân tách dãy các chỉ số và sau đó giới hạn mỗi chuỗi kết quả. Ví dụ, giả sử chúng ta muốn tìm cận dưới của chuỗi số , nó đã được chỉ ra có một cận trên n2. Có lẽ chúng ta cố gắng để giới hạn mỗi số hạng trong tổng bằng số hạng nhỏ nhất, nhưng vì số hạng đó lớn hơn 1, chúng ta có một cận dưới theo n cho tổng – rất xa so với cận trên n2.

Chúng ta có thể nhận được một cận dưới tốt hơn bằng cách phân tách tổng. Để thuận tiện giả sử n là số chẵn. Chúng ta có





đó là cận dưới chặt tiệm cần, vì 

Với một tổng sinh ra từ bước phân tích của một thuật toán, chúng ta thường có thể phân tách tổng và bỏ qua một số hằng số các số hạng ban đầu. Nói chung, kỹ thuật này áp dụng khi mỗi số hạng ak trong tổng là độc lập đối với n. Khi đó với mọi hằng số k0 > 0, chúng ta có thể viết





vì các số hạng khởi tạo của tổng tất cả là hằng số và có một số hằng số trong số chúng. Khi đó chúng ta có thể sử dụng các kỹ thuật khác để giới hạn . Kỹ thuật này cũng áp dụng được cho chuỗi vô hạn. Ví dụ, tìm cận trên tiệm cận của



chúng ta để ý rằng tỷ lệ của các số hạng liên tiếp là





nếu k ≥ 3. Do vậy, tổng có thể được phân chia như sau





vì tổng đầu tiên có một số hằng số các số hạng và tổng thứ hai là một chuỗi hình học giảm.

Kỹ thuật phân tách chuỗi có thể được sử dụng để xác định cận tiệm cận trong các trường hợp khó hơn nhiều. Ví dụ, chúng ta có thể lấy được một cận O(lg n) cho chuỗi điều hoà (A.7):



Ý tưởng là phân tách đoạn từ 1 tới n thành [lg *n*] đoạn và giới hạn trên phần đóng góp của mỗi đoạn bởi 1. Mỗi phần bao gồm các số hạng bắt đầu bằng 1/2i và lớn dần lên nhưng không vượt qua 1/2i+1, như vậy







|  |  |
| --- | --- |
|  | (A.10) |

**Xấp xỉ bằng tích phân**

Khi một tổng có thể được viết dưới dạng , ở đó f(k) là một hàm tăng đều, chúng ta có thể xấp xỉ bằng tích phân:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (A.11) |

Chứng minh tính đúng đắn cho xấp xỉ này được thể hiện trong hình A.1. Tổng được biểu diễn như vùng các hình chữ nhật trong hình, và tích phân là vùng được tô xám bên dưới đường cong. Khi f(k) là hàm tăng đều, chúng ta có thể sử dụng một phương pháp tương tự để tính các giới hạn

|  |  |
| --- | --- |
|  | (A.12) |

Xấp xỉ tích phân (A.12) cho một dự đoán chặt cho số điều hoà cấp n. Cho cận dưới, chúng ta có



|  |  |
| --- | --- |
| = ln n. | (A.13) |

Với cận trên, chúng ta có bất đẳng thức



= ln n,

điều này sinh ra giới hạn

|  |  |
| --- | --- |
|  | (A.14) |

**Bài tập**

***A.2-1***

Hãy chỉ ra rằng được giới hạn bởi một hằng số.

***A.2-2***

Tìm một cận trên tiệm cận của tổng



***A.2-3***

Chỉ ra rằng số điều hoà bậc n là Ω(lg n) bằng cách phân tách tổng.

***A.2-4***

Hãy xấp xỉ tổng bằng tích phân.

***A.2-5***

Tại sao chúng ta không sử dụng xấp xỉ tích phân (A.12) một cách trực tiếp với công thức để có được cận trên của số điều hoà bậc n.

**Bài toán**

***A-1 Giới hạn tổng giới hạn***

Hãy đưa ra các giới hạn chặt tiệm cận cho các tổng. Giả sử rằng r ≥ 0 và s ≥ 0 là các hằng số

1. 
2. 
3. 

**B- Tập hợp, v.v.v**

Nhiều chương trong cuốn sách này có liên quan đến toán học rời rạc. Chương này sẽ xem xét lại một cách đầy đủ hơn các khái niệm, định nghĩa, và các tính chất cơ bản về tập hợp, quan hệ, hàm, đồ thị và cây. Các độc giả đã có hiểu biết tốt về phần này chỉ cần đọc lướt qua chương này.

**B.1 Tập hợp**

Một tập hợp là một nhóm các đối tượng phân biệt, được gọi là các thành viên hay phần tử của tập hợp. Nếu một đối tượng x là một thành viên của một tập S, chúng ta viết x ∈ S (đọc là “x là một thành viên của S”, hay một cách ngắn gọn, “x thuộc S”). Nếu x không phải là một thành viên của S, chúng ta viết x ∉ S. Chúng ta có thể mô tả một tập hợp bằng cách liệt kê một cách chính xác các phần tử của nó như một danh sách bên trong các dầu ngoặc đôi. Ví dụ, chúng ta có thể định nghĩa một tập hợp S chứa chính xác các số 1, 2, và 3 bằng cách viết S = {1, 2, 3}. Vì 2 là một phần tử của tập S, chúng ta có thể viết 2 ∈ S, và vì 4 không phải là một thành viên, chúng ta có 4 ∉ S. Một tập hợp không thể chứa cùng một phần tử hơn một lần [[1]](#footnote-1), và các phần tử của nó không được sắp. Hai tập hợp A và B là bằng nhau, viết là A = B, nếu chúng cùng chứa các phần tử giống nhau. Ví dụ, {1, 2, 3, 1} = {1, 2, 3} = {3, 2, 1}.

Chúng ta đưa ra các ký hiệu thường gặp của tập:

* ∅ ký hiệu tập rỗng, đó là tập hợp không chứa phần tử nào.
* Z ký hiệu tập các số nguyên, đó là tập {..., -2 , -1, 0, 1, 2, ...},
* R ký hiệu tập các số thực
* N ký hiệu tập các số tự nhiên, đó là tập {0, 1, 2, ...}[[2]](#footnote-2)

Nếu tất cả các phần tử của tập đều trong tập B, đó là, nếu x ∈ A thì x ∈ B, chúng ta viết A ⊆ B và nói rằng A là tập con của B. Một tập hợp A là một tập con thực sự của B, viết A ⊂ B, nếu A ⊆ B nhưng A ≠ B. (Một vài tác giả ký hiệu quan hệ tập con thông thường hơn là để chỉ tập con thực.) Với tập hợp bất kỳ, chúng ta có A ⊆ A. Với hai tập A và B, chúng ta có A = B khi và chỉ khi A ⊆ B và B ⊆ A. Với ba tập hợp tuỳ ý A, B, C, nếu A ⊆ B và B ⊆ C thì A ⊆ C. Với tập hợp A bất kỳ, chúng ta có ∅ ⊆ A.

Đôi khi chúng ta định nghĩa tập hợp dưới dạng tập khác. Cho một tập hơp A, chúng ta có thể định nghĩa một tập B ⊆ A bằng cách bắt đầu một thuộc tính phân biệt các phần tử của tập B. Ví dụ, chúng ta có thể định nghĩa tập hợp các số nguyên chẵn bằng cách {x : x ∈ Z và x/2 là một số nguyên}. Dấu hai chấm trong ký hiệu hày được đọc là “sao cho”. (một vài tác giả sử dụng một dấu gạch ngang ở vị trí dấu hai chấm.)

Cho hai tập A và B, chúng ta có thể định nghĩa các tập hợp mới bằng cách áp dụng các toán tử tập hợp:

* Giao của hai tập A và B là một tập

A ∩ B = {x : x ∈ A và x ∈ B}.

* Hợp của hai tập A và B là một tập

A ∪ B = {x : x ∈ A hoặc x ∈ B}.

* Hiệu giữa hai tập hợp A và B là một tập

A – B = {x : x ∈ A và x ∉ B}.

Các toán tử tập hợp tuân theo các quy luật sau:

***Tính chất tập rỗng:***

A ∩ ∅ = ∅

A ∪ ∅ = A.

***Tính chất bất định:***

A ∩ A = A,

A ∪ A = A.

***Tính chất giao hoán:***

A ∩ B = B ∩ A,

A ∪ B = B ∪ A.

***Tính chất kết hợp***

A ∩ (B ∩ C) = (A∩B) ∩ C,

A ∪ (B ∪ C) = (A∪B) ∪ C.

***Tính chất phân phối***

|  |  |
| --- | --- |
| A ∩ (B ∪ C) = (A∩B) ∪ (A∩C),  A ∪ (B ∩ C) = (A∪B) ∩ (A∪C). | (B.1) |

***Tính chất hút:***

A ∩ (A ∪ B) = A,

A ∪ (A ∩ B) = A.

***Quy luật* DeMorgan*:***

|  |  |
| --- | --- |
| A – (B ∩ C) = (A – B) ∪ (A – C),    **Hình B1.**  Một biểu đồ Venn minh hoạ luật DeMorgan đầu tiên.  A – (B ∪ C) = (A – B) ∩ (A – C). | (B.2) |

Luật đầu tiên trong luật DeMorgan được minh hoạ trong hình B.1, sử dụng một lược đồ Ven, một hình vẽ đồ hoạ trong đó các tập hợp được biểu diễn như các vùng trên mặt phẳng.

Tất cả các tập hợp được xét thường là các tập con của một tập lớn hơn U nào đó, được gọi là tập vũ trụ. Ví dụ, nếu chúng ta xét các tập khác nhau được tạo bởi chỉ các số nguyên, tập hợp Z các số nguyên là một vũ trụ thực sự. Cho một vũ trụ U, chúng ta định nghĩa phần bù của một tập A như sau  = U – A. Với tập bất kỳ A ⊆ U, chúng ta có các luật sau:

 = A,

A ∩  = ∅,

A ∪ = U.

Luật DeMorgan (B.2) có thể được viết lại dưới dạng phần bù. Với hai tập hợp tuỳ ý B, C ⊆ U, chúng ta có



Hai tập A và B là rời nhau nếu chúng không có phần tử nào chung, đó là nếu A ∩ B = ∅. Một tập s = {Si} các tập hợp không rỗng tạo thành một phân hoặch của tập S nếu

* Các tập là rời nhau pairwise, đó là Si, Sj ∈ s nếu i ≠ j thì Si ∩ Sj = ∅, và
* Hợp của chúng là S, đó là

S = 

Si∈s

Nói cách khác, s tạo thành một phân hoạch của S nếu mỗi phần tử của S xuất hiện chính xác đúng một lần Si ∈ s.

Số các phần tử trong một tập hợp được gọi là card (hoặc kích thước) của tập hợp, ký hiệu |S|. Hai tập có cùng card nếu các phần tử của chúng có thể cho tương ứng một với nhau. Card của một tập rỗng là |∅| = 0. Nếu card của một tập là một số tự nhiên, chúng ta nói tập hợp là hữu hạn; ngược lại, nó là vô hạn. Một tập vô hạn có thể đưa tương ứng một đối một với một số tự nhiên N là vô hạn đếm được; bằng không, nó là không đếm được. Số nguyên Z là đếm được, nhưng tập số thực R là không đếm được.

Với hai tập hữu hạn bất kỳ A và B, chúng ta có đồng nhất thức

|  |  |
| --- | --- |
| | A ∪ B | = |A| + |B| - |A∩B| | (B.3) |

Nếu A và B là rời nhau, khi đó |A∩B| = 0 và do đó | A ∪ B | = |A| + |B|. Nếu A ⊆ B, khi đó |A| ≤ |B|.

Một tập hữu hạn n phần tử đôi khi được gọi là n-tập. Một 1-tập được gọi là singleton. Một tập con k phần tử của một tập đôi khi được gọi là một k-tập con.

Tập tất cả các tập con của một tập S, bao gồm cả tập rỗng và bản thân tập S, được ký hiệu 2S và được gọi là luỹ thừa của S. Ví dụ, 2[a,b] = {∅, {a}, {b}, {a,b}}. Tập luỹ thừa của một tập hữu hạn có lực lượng 2|S|.

Đôi lúc chúng ta để ý đến cấu trúc như kiểu tập hợp trong đó các phần tử được sắp thứ tự. Một bộ được sắp của hai phần tử a và b được ký hiệu (a,b) và có thể được định nghĩa hình thức như tập (a,b) = {a, {a,b}}. Do đó, bộ thứ tự (a,b) không giống với bộ được sắp (b,a).

Tích Decard của hai tập A và B, được ký hiệu A×B là tập các bộ được sắp sao cho phần tử đầu tiên của bộ là một phần tử của A và phần tử thứ hai là một phần tử của B. Hay một cách hình thức

A×B = {(a,b) : a ∈ A và b ∈ B}.

Ví dụ, {a,b}×{a,b,c} = {(a,a), (a,b) , (a,c), (b,a), (b,b), (b,c)}. Khi A và B là các tập hữu hạn, lực lượng của tích đê-các là

| A×B | = |A| . |B|

Tích đề-các của n tập A1, A2, ... , An­ là tập của n-tuples:

|A1 × A2 × ... × An| = |A1| . |A2| ... |An|

nếu tất cả là hữu hạn. Chúng ta ký hiệu tích đề-các n lần cho cùng một tập hợp A bởi tập

An = A × A × ... × A,

Lượng của nó là |An| = |A|n nếu A là hữu hạn. Một n-tuple cũng có thể được xem như một dãy hữu hạn chiều dài (xem trang 1078).

**Bài tập**

***B.1-1***

Hãy vẽ sơ đồ Ven minh hoạ luật đầu tiên trong luật phân phối (B.1)

***B.1-2***

Chứng minh sự tổng quát hoá của luật DeMorgan cho một tập hợp hữu hạn bất kỳ các tập hợp



***B.1-3★***

Hãy chứng minh sự tổng quát hoá của đồng nhất thức (B.3), được gọi là *luật của giao và hợp*

|A1 ∪ A2 ∪ ... ∪ An| =

|A1| + |A2| + ... + |An|

* |A1∩A2| - |A1∩A3| - ... (tất cả các bộ đôi)

+ |A1∩A2∩A3| + ... (tất cả các bộ ba)



+ (-1)n-1 |A1 ∩ A2 ∩ ... ∩ An|.

***B.1-4***

Hãy chứng minh rằng tập các số tự nhiên lẻ là đếm được.

***B.1-5***

Chứng minh rằng với mọi tập hữu hạn S, tập luỹ thừa 2S có 2|S| phần tử (đó là, có 2|S| tập con phân biệt của S).

***B.1-6***

Hãy đưa ra một định nghĩa quy nạp cho một n-tuple bằng cách mở rộng định nghĩa lý thuyết tập hợp cho một bộ đôi được sắp.

**B.2 Quan hệ**

Một quan hệ nhị nguyên R trên hai tập hợp A và B là một tập con của tích đề-các A×B. Nếu (a,b) ∈ R, đôi lúc chúng ta viết a R b. Khi chúng ta nói rằng R là một quan hệ nhị nguyên trên tập A, có nghĩa là R là một tập con của A×A. Ví dụ, quan hệ nhỏ hơn trên tập số tự nhiên là tập {(a,b) : a, b ∈ N và a < b}. Một quan hệ cấp n trên tập A1, A2, ..., An là một tập con của A1 × A2 × ... × An.

Một quan hệ nhị nguyên R ⊆ A×A là phản xạ nếu

a R a

với mọi a ∈ A. Ví dụ, “=” và “≤” là các quan hệ phản xạ trên N, nhưng “<” thì không. Quan hệ R là đối xứng nếu

a R b thì b R a

với mọi a, b ∈ A. Ví dụ, “=” là đối xứng, nhưng “<” và “≤” thì không. Quan hệ R là bắc cầu nếu

a R b và b R c thì a R c

với mọi a, b, c ∈ A. Ví dụ, các quan hệ “<”, “≤”, và “=” là bắc cầu, nhưng quan hệ R = {(a,b) : a, b ∈ N và a = b - 1} thì không, vì 3 R 4 và 4 R 5 nhưng không có 3 R 5.

Một quan hệ là phản xạ, đối xứng, bắc cầu là một quan hệ tương đương. Ví dụ, “=” là một quan hệ tương đương trên tập số tự nhiên, nhưng “<” thì không. Nếu R là một quan hệ tương đương trên một tập A, khi đó với a ∈ A, lớp tương đương của a là một tập [a] = {b ∈ A: a R b}, đó là tập tất cả các phần tử tương đương với a. Ví dụ, nếu chúng ta định nghĩa R = {(a,b): a, b ∈ N và a + b là một số chẵn}, khi đó R là một quan hệ tương đương, ví a + a là chẵn (phản xạ), a + b là chẵn thì b + a là chẵn (đối xứng), và a + b là chẵn và b + c là chẵn thì a + c là chẵn (bắc cầu). Lớp tương đương của 4 là [4] = {0, 2, 4, 6, ...}, và lớp tương đương của 3 là [3] = {1, 3, 5, 7, ...}. Một định lý cơ bản của lớp tương đương như sau.

***Định lý B.1 (Một quan hệ tương đương giống như một phân hoạch)***

Các lớp tương đương của quan hệ tương đương bất kỳ R trên một tập A tạo thành một phân hoạch của A, và phân hoạch bất kỳ của A xác định một quan hệ tương đương trên A mà với các tập trong phân hoạch là các lớp tương đương.

***Chứng minh.***

Cho phần đầu của chứng minh, chúng ta phải chỉ ra rằng các lớp tương đương của R là không rỗng, các tập rời nhau hoàn toàn có hợp của chúng là A. Vì R là phản xạ nên a ∈ [a], và vì vậy các lớp tương đương là khác rỗng; hơn nữa, vì mọi phần tử a ∈ A thuộc về một lớp tương đương [a], hợp của các lớp tương đương là A. Phần còn lại ta cần chỉ ra rằng các lớp tương đương là tách rời nhau hoàn toàn, đó là, nếu hai lớp tương đương [a] và [b] cung có một phần tử c, thì chúng cùng một tập. a R c và b R c, do tính chất đối xứng và bắc cầu ta có a R b. Do đó, với phần tử tuỳ ý x ∈ [a], chúng ta có x R a thì x R b, và do đó [a] ⊆ [b]. Tương tự, [b] ⊆ [a], và vì vậy [a] = [b].

Cho phần 2 của chứng minh, cho A = {Ai} là một phân hoạch của A, và định nghĩa R = {(a,b) : tồn tại i sao cho a ∈ Ai và b ∈ Ai}. Chúng ta nói rằng R là một quan hệ tương đương trên A. Tính chất phản xạ thoả mãn, vì với a ∈ Ai thì a R a. Tính chất đối xứng thoả mãn, vì nếu a R b, thì a và b trong cùng tập Ai, và do đó b R a. Nếu a R b và b R c, khi đó tất cả ba phần tử trong cùng một tập, và vì vậy a R c và tính chất bắc cầu được thoả mãn. Để thấy rằng các tập trong phân hoạch là các lớp tương đương của R, để ý rằng nếu a ∈ Ai, thì x ∈ [a], nghĩa là x ∈ Ai, và x ∈ Ai nghĩa là x ∈ [a]. ■

Quan hệ nhị nguyên R trên một tập A là phản đối xứng nếu

a R b và b R a thì a =b.

Ví dụ, quan hệ “≤” trên tập các số tự nhiên là phản đối xứng, vì a ≤ b và b ≤ a thì a = b. Một quan hệ là phản xạ, phản đối xứng, và bắc cầu là một quan hệ thứ tự, và chúng ta gọi một tập trên đó một quan hệ thứ tự được định nghĩa là tập được sắp thứ tự. Ví dự, quan hệ “là thế hệ con” là một quan hệ được sắp thứ tự trên tập người (nếu chúng ta coi mỗi cá nhân như là con của chính họ).

Một tập A được sắp nào đó, có thể không có phần tử lớn nhất duy nhất *a* sao cho b R a với mọi b ∈ A. Thay vào đó, có thể có vài phần tử lớn nhất *a* sao cho không có phần tử b ∈ A, ở đó b ≠ a, sao cho a R b. Ví dụ, trong một tập các hợp kích thước khác nhau có thể có vài hộp lớn nhất không thể ở trong hộp khác, không có hộp cực đại nào mà các hộp khác có thể ở trong nó [[3]](#footnote-3).

Một toàn ánh f: A → B đôi khi được mô tả như ánh xạ A vào B. Khi chúng ta nói rằng f là lên trên, chúng ta muốn nói là nó là toàn ánh.

Một hàm f : A → B là một đơn ánh nếu với các biến số phân biệt cho f sinh ra các giá trị phân biệt, đó là, nếu a ≠ a’ thì f(a) ≠ f(a’). Ví dụ, hàm f(n) = 2n là một hàm đơn ánh từ N tới N, vì mỗi số chẵn b là ảnh của f của nhiều nhất một phần tử của miền, có tên b/2. Hàm f(n) = [n/2] không phải là đơn ánh, ví giá trị 1 được sinh bởi hai biến số: 2 và 3. Một đơn ánh đôi khi được gọi là hàm 1-1.

**B.3 Hàm**

Một hàm f : A → B là một song ánh nếu nó là đơn ánh và toàn ánh. Ví dụ, hàm f(n) = (-1)n [n/2] là một song ánh từ N vào Z.

0 → 0,

1 → -1,

2 → 1,

3 → -2,

4 → 2,



Hàm là một đơn ánh, vì không có phần tử nào của Z là ảnh của hơn hai phần tử của N. Nó là toàn ánh, vì mọi phần tử của Z xuất hiện như là ảnh của một phần tử nào đó của N. Do đó, hàm là song ánh. Một song ánh đôi khi được gọi là tương ứng 1-1, vì nó tạo thành các cặp trong miền nguồn và nguồn gốc. Một song ánh từ tập A vào bản thân nó được gọi là một hoán vị.

Khi một hàm f là song ánh, phần tử nghịch đảo f-1 được định nghĩa như sau

f-1(b) = a khi và chỉ khi f(a) = b.

Ví dụ, nghịch đảo của hàm f(n) = (-1)n [n/2] là



**Bài tập**

***B.3-1***

Cho A và B là hai tập hữu hạn, và f: A → B là một hàm số. Chứng minh rằng

1. Nếu f là một đơn ánh thì |A| ≤ |B|
2. Nếu f là toàn ánh thì |A| ≥ |B|

***B.3-2***

Hàm f(x) = x + 1 có phải là song ánh khi miền chủ và miền đích là N? Nó có phải là song ánh khi miền chủ và miền đích là Z?

***B.3-3***

Hãy cho một định nghĩa tự nhiên của nghịch đảo của một quan hệ nhị nguyên mà nếu quan hệ là một hàm song ánh, quan hệ nghịch đảo của nó là một hàm nghịch đảo của nó.

***B.3-4 ★***

Hãy cho một song ánh từ Z vào Z × Z.

**B.4 Đồ thị**

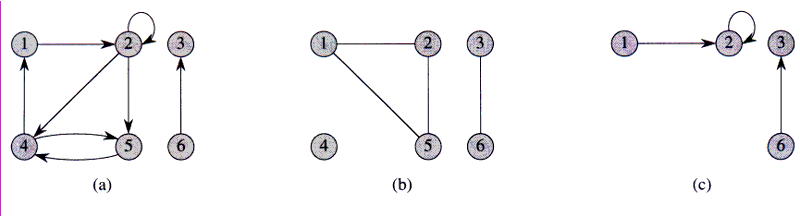
Mục này giới thiệu hai loại đồ thị: đồ thị có hướng và vô hướng. Một vài định nghĩa khác với định nghĩa được đưa ra ở đây, nhưng hầu như sự khác nhau là rất ít. Mục 22.1 cho thấy các đồ thị được thể hiện trong bộ nhớ máy tính như thế nào.

Một đồ thị có hướng G là một bộ đôi (V, E), trong đó V là một tập hữu hạn và E là một quan hệ nhị nguyên trên V. Tập V được gọi là tập đỉnh của G, và các phần tử của nó được gọi là đỉnh. Tập E được gọi là tập cạnh của G, và các phần tử của nó được gọi là cạnh. Hình B.2(a) là một thể hiện hình ảnh của một đồ thị có hướng trên tập đỉnh {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Các đỉnh được thể hiện bởi các đường tròn trong hình, các cạnh được thể hiện bằng các mũi tên. Lưu ý rằng cạnh vòng từ một đỉnh đến chính nó là có thể.

Một đồ thị vô hướng G = (V, E), tập cạnh E bao gồm các bộ đôi không được xắp các đỉnh, hơn là các bộ đôi được xắp. Đó là một cạnh là một tập {u, v}, ở đó u, v ∈ V và u ≠ v. Để thuận tiện, chúng ta ký hiệu (u,v) cho một cạnh, hơn là ký hiệu tập {u, v}, và (u, v) và (v, u) được coi là cùng một cạnh. Trong một đồ thị vô hướng, các cạnh vòng được bỏ qua, và vì vậy mọi cạnh bao gồm chính xác hai đỉnh phân biệt. Hình B.2(b) là một minh hoạ hình ảnh của một đồ thị vô hướng trên tập đỉnh {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Nhiều định nghĩa về đồ thị có hướng và vô hướng là như nhau, mặc dù một vài khái niệm có ý khác nhau đôi chút theo hai nghĩa. Nếu (u,v) là một cạnh trong một đồ thị có hướng G = (V, E), chúng ta nói rằng (u, v) là vốn có từ hoặc xuất phát từ đỉnh u và đến hay vào đỉnh v. Ví dụ, các cạnh xuất phát từ đỉnh 2 trong hình B.2(a) là (2,2), (2,4) và (2,5). Các cạnh đến đỉnh 2 là (1,2) và (2,2). Nếu (u,v) là một cạnh trong đồ thị vô hướng G = (V, E), chúng ta nói rằng (u,v) là kề với đỉnh u và v. Trong hình B.2(b), các cạnh kề với đỉnh 2 là (1,2) và (2,5).

Nếu (u, v) là một cạnh của một đồ thị G = (V, E), chúng ta nói rằng đỉnh v kề với đỉnh u. Khi đồ thị là vô hướng, quan hệ kề là đối xứng. Khi đồ thị là có hướng, quan hệ kề là không cần thiết là đối xứng. Nếu v kề với u trong một đồ thị có hướng, chúng ta đôi khi viết u → v. Trong phần (a) và (b) của hình b.2, đỉnh 2 kề với 1, vì cạnh (1, 2) thuộc về cả hai đồ thị. Đỉnh 1 không kề với đỉnh 2 trong hình B.2(a), vì cạnh (2, 1) không thuộc ở trong đồ thị.

****

**Hình B.2** Đồ thị có hướng và vô hướng

Bậc của một đỉnh trong một đồ thị vô hướng là số các cạnh nhận nó làm đầu mút. Ví dụ, đỉnh 2 trong hình B.2(b) có bậc 2. Một đỉnh có bậc 0 như đỉnh 4 trong hình B.2(b) là cô lập. Trong một đồ thị có hướng, bậc-ra của một đỉnh là số cạnh rời nó, và bậc-vào của một đỉnh là số cạnh đến nó. Bậc của một đỉnh trong một đồ thị có hướng là tổng của bậc-ra và bậc-vào của nó. Đỉnh 2 trong hình B.2(a) có bậc-vào là 2, bậc-ra là 3, và bậc là 5.

Đường đi độ dài k từ một đỉnh u tới một đỉnh u’ trong một đồ thị G = (V, e) là một dãy (v0, v1, v2, ... , vk) các đỉnh sao cho u = v0, u’ = vk, và (vi-1, vi) ∈ E với i = 1, 2, ..., k. Độ dài của đường đi là số cạnh trong đường đi. Đường đi chứa các đỉnh v0, v1, v2, ... , vk và các cạnh (v0, v1), (v1, v2), ... , (vk-1, vk). (Luôn luôn có một đường đi độ dài 0 từ u đến u.) Nếu có một đường đi p từ u tời u’, chúng ta nói rằng u’ là có thể tới u qua đường đi p, đôi khi chúng ta ký hiệu  nếu G là có hướng. Một đường đi là đơn giản nếu tất cả các đỉnh trong đường đi là khác nhau. Trong hình B.2(a), đường đi <1, 2, 5, 4> là đường đi đơn giản độ dài 3. Đường đi <2, 5, 4, 5> không đơn giản.

Một đường đi con của đường đi p = <v0, v1, v2, ... , vk> là một dãu con liên tục các đỉnh của nó. Đó là, với mọi 0 ≤ i ≤ j ≤ k, dãy con các đỉnh <vi, vi+1, ..., vj> là một đường đi con của p.

Trong một đồ thị có hướng, một đường đi <v0, v1, v2, ... , vk> tạo thành một chu trình nếu v0 = vkvà đường đi chứa ít nhất một cạnh. Thêm vào đó, chu trình là đơn giản nếu v1, v2, ... , vk là phần biệt. Một vòng là một chu trình độ dài 1. Hai đường đi <v0, v1, v2, ... , vk> và <v’0, v’1, v’2, ... , v’k> tạo thành một chu trình như nhau tồn tại một số nguyên j sao cho v’i = v(i+j) mod k với i = 0, 1, ..., k – 1. Trong hình B.2(a), đường đi <1, 2, 4, 1> tạo thành một chu trình như các đường đi <2, 4, 1, 2> và <4, 1, 2, 4>. Chu trình này là đơn giản nhưng chu trình <1, 2, 4, 5, 4, 1> thì không đơn giản. Chu trình <2, 2> bản thân tạo thành vòng (2, 2). Một đồ thị có hướng không có vòng nào là đơn giản. Trong một đồ thị vô hướng, một đường đi <v0, v1, v2, ... , vk> tạo thành một chu trình (đơn giản) nếu k ≥ 3, v0 = vk, và v1, v2, ... , vk là phân biệt. Ví dụ, trong hình B.2(b), đường đi <1, 2, 5, 1> là một chu trình. Một đồ thị không có chu trình là một xoắn (acyclic).

Một đồ thị vô hướng là liên thông nếu mọi cặp đỉnh được nối với nhau bởi một đường đi. Các thành phần liên thông của một đồ thị là các lớp tương đương các đỉnh theo quan hệ kề nhau. Đồ thị trong hình B.2(b) có ba thành phần liên thông: {1, 2, 5}, {3, 6} và {4}. Mọi đỉnh trong {1, 2, 5} là có đường đến từ các đỉnh khác trong {1, 2, 5}. Một đồ thị vô hướng là liên thông nếu nó có một thành phần liên thông duy nhất, đó là nếu mọi đỉnh đều có đường đi đến các đỉnh khác.

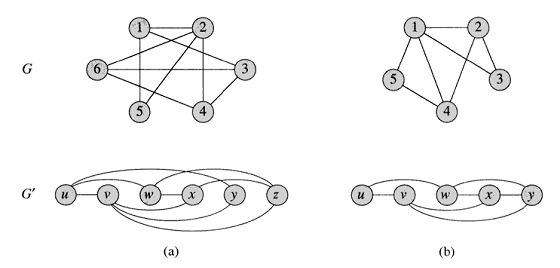
Một đồ thị có hướng là liên thông mạnh nếu giữa hai đỉnh bất kỳ đều có đường đi. Các thành phần liên thông mạnh của một đồ thị vô hướng là các lớp tương đương các đỉnh với quan hệ có đường đi giữa các đỉnh. Một đồ thị là liên thông mạnh nếu nó có một thành phần liên thông mạnh duy nhất. Đồ thị trong hình B.2(a) có ba thành phần liên thông mạnh: {1, 2, 4, 5}, {3} và [6}. Tất cả mọi cặp đỉnh trong {1, 2, 4, 5} có thể nối với nhau. Các đỉnh {3, 6} không tạo thành một thành phần liên thông mạnh, vì đỉnh 6 không có đường đi tới đỉnh 3.

Hai đồ thị là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại một song ánh f : V → V’ sao cho (u, v) ∈ E khi và chỉ khi (f(u), f(v)) ∈ E. Nói cách khác, chúng ta có thể gán nhãn các đỉnh trong G bởi các đỉnh trong G’, lưu giữ các cạnh tương ứng tương ứng trong G và G’. Hình G.3(a) cho thấy thấy một cặp đồ thị G và G’ đẳng cấu với các tập đỉnh tương ứng V = {1, 2, 3, 4, 5, 6} và V’ = {u, v, w, x, y, z}. Ánh xạ từ V đến V’ xác định bởi f(1) = u, f(2) = v, f(3) = w, f(4) = x, f(5) = y, f(6) = z là một song ánh. Các đồ thị trong hình B.3(b) là không đẳng cấu. Mặc dù cả hai đồ thị có 5 đỉnh và 7 đỉnh, đồ thị phía trên có một đỉnh bậc 4 và đồ thị phía dưới không có.

Chúng ta nói rằng một đồ thị G’ = (V’, E’ ) là đồ thị con của đồ thị G = (V, E) nếu V ⊆ V’ và E ⊆ E’. Cho một tập V’ ⊆ V, đồ thị con của G được sinh bởi V’ là đồ thị G’ = (V’, E’), trong đó

E’ = {(u, v) ∈ E’: u, v ∈ V’}.

Đồ thị con được sinh bởi tập đỉnh {1, 2, 3, 6} trong hình B.2(a) xuất hiện trong hình B.2(c) và có tập các cạnh {(1, 2), (2, 2), (6,3)}.



**Hình B.3 (a)**  Một cặp đồ thị đồng dạng

Cho một đồ thị vô hướng G = (V, E), đồ thị có hướng của G là đồ thị vô hướng G’ = (V’, E’), trong đó (u, v) ∈ E’ khi và chỉ khi (u, v) ∈ E. Đó là, mỗi cạnh vô hướng (u, v) được thay bởi các cạnh (u, v) và (v, u) trong đồ thị có hướng. Cho một đồ thị có hướng G = (V, E), các thành phần liên thông của G là một đồ thị vô hướng G’ = (V’, V’), trong đó (u, v) ∈ E’khi và chỉ khi u ≠ v và (u, v) ∈ E. Đó là, đồ thị vô hướng chứa cạnh của G “với các thành phần liên thông được loại bỏ” và với các vòng được loại bỏ. (Vì (u, v) và (v, u) đều cùng là một cạnh trong một đồ thị vô hướng, đồ thị vô hướng của một đồ thị có hướng chứa nó chỉ một lần, thậm chí nếu đồ thị có hướng chứa cả hai cạnh (u, v) và (v, u).) Trong một đồ thị có hướng G = (V, E), một lân cận của một cạnh là bất kỳ cạnh nào kề với u trong một đồ thị vô hướng của G. Đó là, v là một lân cận của u nếu (u, v) ∈ E hoặc (v, u) ∈ E. Trong một đồ thị vô hướng, u và v là lân cận nếu chúng kề nhau.

Một vài loại đồ thị được gán cho những tên đặc trưng. Một đồ thị đầy đủ là một đồ thị vô hướng trong đó mọi cặp đỉnh đều kề nhau. Một đồ thị chia đôi là một đồ thị vô hướng G = (V, E) trong đó V có thể được chia thành hai tập V1 và V2 sao cho (u, v) ∈ E thì u ∈ V1 và v ∈ V2 hoặc u ∈ V2 và v ∈ V2. Đó là, tất cả các cạnh nối giữa hai tập V1 và V2. Một xoắn, một đồ thị vô hướng là một rừng và một đồ thị liên thông, xoắn, vô hướng là một cây (tự do) (xem phần B.5). Chúng ta thường lấy các ký tự đầu của một “đồ thị xoắn có hướng” và gọi đồ thị như vậy là một đai (dag).

Có hai loại đồ thị biến thể đồ thị bạn thường có thể đôi khi gặp. Một siêu đồ thị giống như một đồ thị vô hướng, nhưng nó có thể có cả bội cạnh giữa các đỉnh và các vòng. Một đồ thị lai giống như một đồ thị vô hướng, nhưng mỗi cạnh lai, không những chỉ nối hai đỉnh, mà còn nối với tập con tuỳ ý các đỉnh. Nhiều thuật toán được viết cho các đồ thị có hướng và vô hướng thông thường có thể được cài đặt để chạy trên các cấu trúc giống đồ thị.

Một sự thu gọn của một đồ thị vô hướng G = (V, E) bởi một cạnh e = (u, v) là một đồ thị G’ = (V’, E’), ở đó V’ = V – {u, v}∪{x} và x là một cạnh mới. Tập các cạnh E’ được tạo từ E bằng cách xoá cạnh (u, v) và với mỗi đỉnh w kề với u hoặc v, xoá bất kỳ cạnh (u, v) hoặc (v, u) trong E và thêm vào cạnh mới (x, w).

**Bài tập**

***B.4-1***

Mỗi vị khách tại một buổi liên hoan của khoa bắt tay nhau, và mỗi giáo viên nhớ số lần người ấy bắt tay. Cuối buổi liên hoan, người trưởng khoa tính tổng số lần bắt tay của các giáo viên. Chứng minh rằng kết quả là chẵn bằng cách chứng minh bổ đề “bắt tay”: nếu G = (V, E) là một đồ thị vô hướng, khi đó



***B.4-2***

Chứng minh rằng nếu một đồ thị có hướng hoặc vô hướng chứa một đường đi giữa hai đỉnh u và v, khi đó nó chứa một đường đi đơn giản giữa u và v. Chứng minh rằng nếu một đồ thị có hướng chứa một chu trình thì nó chứa một chu trình đơn giản.

***B.4-3***

Chứng minh rằng đồ thị vô hướng liên thông tuỳ ý G = (V, E) thoả mãn |E| ≥ |V| - 1.

***B.4-4***

Hãy kiểm tra rằng trong một đồ thị vô hướng, quan hệ liên thông là một quan hệ tương đương trên các đỉnh của đồ thị. Tính chất nào trong ba tính chất của một quan hệ tương đương được thoả mãn trong trường hợp tổng quát cho quan hệ liên thông trên tập đỉnh của một đồ thị có hướng?

***B.4-5***

Chỉ ra đồ thị vô hướng của đồ thị có hướng trong hình B.2(a).

Chỉ ra đồ thị có hướng của đồ thị vô hướng trong hình B.2(b).

***B.4-6 ★***

Chỉ ra rằng một đồ thị lai có thể được biểu diễn bởi một đồ thị tách đôi nếu chúng ta cho các cạnh đến trong đồ thị lai tương ứng với các tính kề trong đồ thị tách đôi. (Chỉ dẫn: Cho một tập đỉnh trong đồ thị tách đôi tương ứng với các đỉnh của đồ thị lai, và cho tập đỉnh còn lại của đồ thị tách đôi tương ứng với các cạnh lai.)

**B.5 Cây**

Như đối với đồ thị, có nhiều khái niệm liên quan tuy có khác đôi chút về cây. Phần này giới thiệu các định nghĩa và các tính chất toán học của một vài loại cây. Phần 10.4 và 22.1 miêu tả cách biểu diễn một cây trong bộ nhớ máy tính.

***B.5.1 Cây tự do***

Như đã định nghĩa trong phần B.4, một cây tự do là một đồ thị vô hướng, xoắn, liên thông. Chúng ta thường bỏ qua sự tự do kề khi chúng ta nói rằng một đồ thị là một cây. Nếu một đồ thị vô hướng là một xoắn nhưng không liên thông, nó là một rừng. Nhiều thuật toán thực hiện trên cho các cây cũng thực hiện tốt đối với các rừng. Hình B.4(a) cho thấy một cây tự do, và hình B.4(b) cho thấy một rừng. Rừng trong hình B.4(b) không phải là một cây tự do bởi vì nó không liên thông. Đồ thị trong hình B.4(c) không phải là một cây hay một rừng, bởi vì nó chứa một chu trình.

Định lý sau đây cho thấy nhiều tính chất quan trọng về một cây tự do.

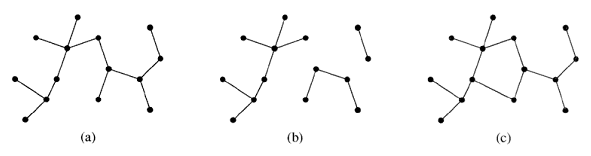
***Định lý B.2 (Tính chất của cây tự do)***

Cho G = (V, E) là một đồ thị vô hướng. Các phát biểu sau là tương đương:

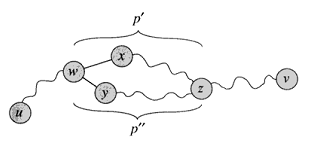
1. G là một cây tự do.
2. Mọi hai đỉnh tuỳ ý trong G được nối với nhau bởi một đường duy nhất.
3. G là liên thông, nhưng nếu một cạnh bất kỳ bị loại khỏi E, đồ thị kết quả là không liên thông.
4. G là liên thông và |E| = |V| - 1.
5. G là một xoắn, và |E| = |V| - 1.
6. G là một xoắn, nhưng nếu một cạnh bất kỳ được thêm vào E, đồ thị kết quả chứa một chu trình.

***Chứng minh.***

1. ⇒ (2): Vì một cây là liên thông, hai đỉnh bất kỳ trong G là được nối với nhau bởi ít nhất một đường đi đơn giản. Cho u và v là các đỉnh được nối với nhau bởi hai đường đi đơn giản phân biệt p1 và p2, như chỉ ra trong hình B.5. Cho w là đỉnh mà hai đường đi phân nhánh ra lần đầu; w là đỉnh đầu tiên trên p1 và p2 mà đỉnh kế trên p1 là x và đỉnh kế tiếp trên p2 là y, ở đó x ≠ y. Cho z là đỉnh đầu tiên tại đó hai đường đi gặp nhau; z là đỉnh đầu tiên tiếp sau đỉnh w thuộc p1 và cũng thuộc p2. Cho p’ là đường đi con của p1 từ w qua x tới z, và cho p’’ là đường đi con của p2 từ w qua y tới z. Các đường đi p’ và p’’không có đỉnh nào chung ngoại trừ các đỉnh kết của chúng. Do đó, đường đi đạt được bởi nối p’ và phần đảo của p’’ là một chu trình. Điều này mẫu thuẫn với giả sử của chúng ta rằng G là một cây. Do đó, nếu G là một cây, có nhiều nhất một đường đi đơn giản giữa hai đỉnh.
2. ⇒ (3): Nếu hai đỉnh bất kỳ trong G được nối với nhau bởi một đường đi đơn giản duy nhất, khi đó G là liên thông. Cho (u, v) là một cạnh tuỳ ý trong E. Cạnh này là một đường đi từ u tới v, và vì vậy nó phải là đường đi duy nhất từ u tới v. Nếu chúng ta loại bỏ (u, v) từ G, sẽ không có đường đi từ u tới v, và do đó sự loại bỏ nó làm tách rời G.
3. ⇒ (4): Bằng cách giả sử rằng, đồ thị G là liên thông, và do bài tập B.4-3, chúng ta có |E| ≥ |V| - 1. Chúng ta sẽ chứng minh |E| ≤ |V| - 1 bằng quy nạp. Một đồ thị liên thông với n = 1 hoặc n = 2 đỉnh có n – 1 cạnh. Giả sử rằng G có n ≥ 3 đỉnh và tất cả các đồ thị thoả mãn (3) với một số ít hơn n đỉnh cũng thoả mãn |E| ≤ |V| - 1. Loại bở một cạnh tuỳ ý khỏi G sẽ tách đồ thị thành k ≥ 2 thành phần liên thông (thực sự k = 2). Mỗi thành phần thoả mãn (3), hoặc bằng không G không thoả mãn (3). Do đó, bằng quy nạp, số cạnh trong tất cả các thành phần được kết hợp nhiều nhất là |V| - k ≤ |V| - 2. Thêm vào cạnh bị loại bỏ sẽ có |E| ≤ |V| - 1.
4. ⇒ (5): Giả sử rằng G là liên thông và |E| = |V| - 1. Chúng ta phải chỉ ra rằng G là xoắn. Giả sử G có một chu trình chứa k đỉnh v1, v2, ... , vk, và không mất tính tổng quát giả sử rằng chu trình này là đơn giản. Cho Gk = (Vk, Ek) là đồ thị con của G chứa chu trình. Nhớ rằng |Vk| = |Ek| = k. Nếu k < |Vk|, phải có một đỉnh vk+1 ∈ V – Vk kề với một đỉnh vi ∈ Vk nào đó, vì G là liên thông. Ký hiệu Gk+1 = (Vk+1, Ek+1) là đồ thị con của G với Vk+1 = Vk ∪ {vk+1} và Ek+1 = Ek ∪ {(vi, vk+1)}. Lưu ý rằng |Vk+1| = | Ek+1| = k + 1. Nếu k + 1 < |V|, chúng ta tiếp tục định nghĩa Gk+2 bằng cách tương tự và cứ thế tiếp tục cho đến khi chúng ta đạt được Gn = (Vn, En), ở đó n = |Vn|, Vn = V, và |En| = |Vn| = |V|. Vì Gn là một đồ thị con của G, chúng ta có En ⊆ E, và do đó |E| ≥ |V|, điều này mâu thuẫn với giả sử |E| = |V| -1. Do đó, G là một xoắn.
5. ⇒ (6): Giả sử rằng G là một xoắn và |E| = |V| - 1. Cho k là số thành phần liên thông của G. Theo định nghĩa mỗi thành phần liên thông là một cây tự do, và từ (1) suy ra (5), tổng tất cả các cạnh trong các thành phần liên thông của G là |V| - k. Do đó, chúng ta có k = 1, và G thực sự là một cây. Từ (1) suy ra (2), và hai đỉnh trong G là liên thông bởi một đường đi duy nhất. Do vậy, thêm vào bất kỳ cạnh nào vào G sẽ tạo một chu trình.
6. ⇒ (1): Giả sử rằng G là một xoắn nhưng nếu thêm bất kỳ cạnh nào vào E sẽ tạo thành một chu trình. Chúng ta phải chỉ ra rằng G là liên thông. Cho u và v là hai đỉnh bất kỳ trong G. Nếu u và v không kề nhau, thêm vào cạnh (u, v) tạo thành một chu trình trong đó tất cả các cạnh, trừ cạnh (u, v), thuộc về G. Do đó, có một đường đi từ u tới v, và vì u và v được chọn tuỳ ý, G là liên thông. ■



**Hình B.4 (a)** Một cây tự do. (b) Một rừng. (c) Một đồ thị chứa một chu trình và vì vậy không phải là một cây hay một rừng.



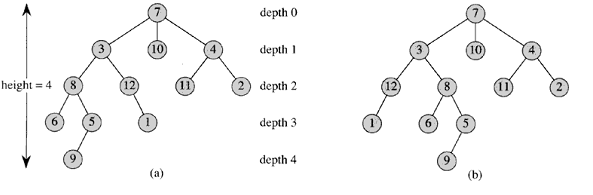
**Hình B.5** Một bước trong chứng minh của định lý B.2: Nếu (1) G là một cây tự do thì (2) hai đỉnh bất kỳ trong G là liên thông bởi một đường đi đơn giản duy nhất. Giả thiết phản chứng rằng các đỉnh u và v được nối với nhau bởi hai đường đi đơn giản p1 vàp2. Những đường đi này phân nhánh tại đỉnh w, và chúng gặp nhau lần đầu tại đỉnh z. Đường đi p’kết hợp với đường đi p’’ tạo thành một chu trình, điều này mâu thuẫn với điều phản chứng.

***B.5.2 Cây có gốc và cây được sắp***

Một cây có gốc là một cây tự do trong đó có một đỉnh được phân biệt với các đỉnh khác. Đỉnh được phân biệt được gọi là gốc của cây. Chúng ta thường coi một đỉnh của một cây có gốc như là một nút của cây. Hình B.6(a) cho thấy một cây có gốc trên tập 12 nút với gốc là 7.

Xét một nút x trong một cây có gốc T với gốc r. Mọi nút y trên một đường đi duy nhất từ r tới x được gọi là tiền bối của x. Nếu y là một tiền bối của x, thì x là cháu của y. (Mọi nút vừa là tiền bối vừa là cháu của chính nó.) Nếu y là tiền bối của x và x ≠ y thì y là tiền bối thực sự của x và x là cháu thực sự của y. Cây con có gốc tại x được tạo thành từ các cháu của x, có gốc là x. Ví dụ, cây con có gốc tại nút 8 trong hình B.6(a) chứa các nút 8, 6, 5, và 9.

Nếu cạnh cuối cúng trên đường đi từ nút gốc r của một cây T tới nút x là (x, y) thì y là cha của x, và x là con của y. Gốc là nút duy nhất trong T không có cha. Nếu hai nút có cùng cha, chúng là anh em. Một nút không có con là một nút ngoài hay gọi là lá. Một nút không phải là lá là nút trong.



**Hình B.6** Các cây có gốc và cây được sắp. (a) Một cây có gốc với độ cao 4. Cây được vẽ theo một cách chuẩn: gốc (nút 7) ở trên cùng, các con của nó (nút với độ sâu 1) ở bên dưới nó, con(nút với độ sâu 2) ở bên dưới chúng, và cứ thế tiếp tục. Nếu cây là được sắp, quan hệ từ từ trái sang phải của các con của một nút là quan trọng; bằng không nó không quan trọng. (b) Một cây có gốc khá. Một cây có gốc, nó giống với cây trong (a), nhưng như một cây được sắp nó khác, vì các con của nút 3 xuất hiện theo thứ tự khác.

Số con của một nút x trong một cây có gốc T được gọi là bậc của x. Độ dài của đường đi từ nút gốc r tới một nút x là độ sâu của x trong T. Độ cao của một nút trong một cây là số các cạnh trên đường đi đơn giản dài nhất từ trên xuống từ nút đó tới một lá, và độ cao của một cây là độ cao của gốc của nó. Độ cao của một cây cũng bằng với độ sâu lớn nhất của nút bất kỳ trong cây.

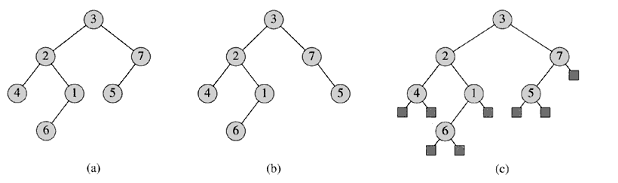
Một cây được sắp là một cây có gốc trong đó con của mỗi nút đều được săp. Đó là nếu một nút có k con thì có con thứ nhất, con thứ hai,..., và một con thứ k. Hai cây trong hình B.2 là khác nhau khi xét chúng như hai cây được sắp, nhưng là như nhau khi xét chúng chỉ như cây có gốc.

***B.5.3 Cây nhị phân và cây vị trí***

Cây nhị phân được định nghĩa một cách quy nạp. Một cây nhị phân T là một cấu trúc được định nghĩa như một tập hữu hạn các nút mà nó thoả mãn

* nó chứa không nút nào, hoặc
* nó là tổ hợp của ba tập nút phân biệt: một nút gốc, một cây nhị phân được gọi là cây con trái và một cây nhị phân được gọi là cây con phải.

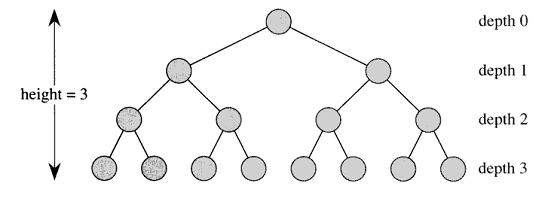
Cây nhị phân không chứa nút nào cả được gọi là cây rỗng hoặc cây *null*, đôi khi được ký hiệu là NIL. Nếu cây con trái là không rỗng, gốc của nó được gọi là con trái của nút gốc của toàn bộ cây. Cũng như vậy, gốc của một cây con phải không rỗng là con phải của gốc của toàn bộ cây. Nếu một cây con là cây rỗng NIL, chúng ta nói rằng con là không có. Hình B.7(a) cho thấy một cây nhị phân.



**Hình B.7** Các cây nhị phân. (a) Một cây nhị phân được vẽ theo cách chuẩn. Con trái của một nút được vẽ bên dưới nút và về bên trái. Con phải được vẽ bên dưới và về bên phải. (b) Một cây nhị phan khác với cây trong (a). Trong (a), con trái của nút 7 là 5 và con phải không có. Trong (b), con trái của 7 là không có và con phải là 5. Như một cây được sắp, các cây này là giống nhau, như chúng là khác nhau nếu coi chúng là cây nhị phân. (c) Cây nhị phân trong (a) được biểu diễn bởi các nút trong của một cây nhị phân đầy đủ: một cây nhị phân được sắp trong đó mỗi nút trong có bậc 2. Các lá trong cây được vẽ như những ô vuông.

Một cây nhị phân không đơn giản là một cây được sắp trong đó mỗi nút có bậc nhiều nhất là 2. Ví dụ, trong một cây nhị phân, nếu một nút có chỉ một con, vị trí của con, con trái hoặc con phải, mới là vấn đề. Trong một cây được sắp, không có sự phân biệt một con duy nhất là con trái hay con phải. Hình B.7(a) cho thấy một cây nhị phân khác với cây trong hinhg B.7(a) do vị trí của một nút. Tuy nhiên xét như một cây được sắp hai cây là như nhau.

Thông tin vị trí trong một cây nhị phân có thể được biểu diễn bởi các nút trong của một cây nhị phân, như được thấy trong hình B.7(c). Ý tưởng là thay mỗi nút trống trong một cây nhị phân bằng một nút không có con. Các nút lá được vẽ như các hình vuông trong hình. Cây sinh ra là một cây nhị phân đầy đủ: mỗi nút là nút lá hoặc có bậc 2. Không có nuýt nào có bậc 1. Do đó, thứ tự của các con của một nút thể hiện thông tin vị trí.



**Hình B.8**  Một cây nhị phân đầy đủ có độ cao 3 với 8 lá và 7 nút trong.

Thông tin vị trí phân biệt cây nhị phân với cây được sắp có thể được mở rộng cho các cây với hơn 2 con cho mỗi nút. Trong một cây vị trí, con của một nút được gán nhãn bằng các số nguyên phân biệt. Con thứ i của một nút là vắng mặt nếu không có con được gán nhãn bằng một số nguyên i. Một cây k-ary là một cây vị trí trong đó với mọi nút, tất cả các con được gán nhãn lớn hơn k đều không có. Như vậy, một cây nhị phân là một cây k-ary với k = 2.

Một cây k-ary đầy đủ là một cây k-ary trong đó tất cả các lá có cùng một độ sâu và tất cả các nút trong có bậc k. Hình B.8 chỉ ra một cây nhị phân đầy đủ độ cao 3. Một cây k-ary đầy đủ có độ cao k có bao nhiêu lá? Gốc có k con độ sâu 1, mỗi con trong số chúng có độ sâu 2, v.v... Do đó, số lá độ sâu h là kh. Do đó, độ cao của một cây k-ary đầy đủ với n lá là logk n. Số các nút trong của một cây k-ary đầy đủ có độ cao h là

1 + k + k2 + ... + kh-1 



do đẳng thức (A.5). Do đó, một cây nhị phân đầy đủ có 2h -1 nút trong.

**Bài tập**

***B.5-1***

Hãy vẽ tất cả các cây tự do có 3 đỉnh A, B, và C.

Hãy vẽ tất cả các cây có gốc với các nút A, B, và C khi coi A như là nút gốc.

Hãy vẽ tất cả các cây được sắp với các nút A, B, và C khi coi A như là nút gốc.

Hãy vẽ tất cả các cây nhị phân với các nút A, B, và C khi coi A như là nút gốc.

***B.5-2***

Cho G = (V, E) là một đồ thị vô hướng xoắn trong đó có một đỉnh v0 ∈ V sao cho có một đuờng đi duy nhất từ v0 tới mọi đỉnh v ∈ V. Chứng minh rằng đồ thị vô hướng của G tạo thành một cây.

***B.5-3***

Hãy chứng minh bằng quy nạp rằng số các nút bậc 2 trong một cây nhị phân không rỗng bất kỳ là ít hơn số lá là 1.

***B.5-4***

Sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh rằng một cây nhị phân không rỗng với n nút có độ cao ít nhất là [lg n].

***B.5-5 ★***

Độ dài đường đi trong của một cây nhị phân đầy đủ là tổng của độ sâu của mỗi nút, lấy trên tất cả các nút trong của cây. Cũng như vậy, độ dài đường đi ngoài là tổng của độ sâu của mỗi lá, lấy trên tất cả các lá của cây. Xét một cây nhị phân đầy đủ với n nút trong, độ dài đường đi trong là i, và độ dài đường đi ngoài là e. Chứng minh rằng e = i + 2n.

***B.5-6 ★***

Chúng ta gán một tải trọng w(x) = 2-d với mỗi lá x độ sâu d trong một cây nhị phân T. Chứng minh rằng , ở đó tổng được lấy trên tất cả các lá x trong T. (Điều này được biết như bất đằng thức Kraft.)

***B.5-7★***

Chứng minh rằng mọi cây nhị phân với L lá chứa một cây con có số lá nằm trong khoảng L/3 và 2L/3.

**Bài toán**

***B-1 Tô màu đồ thị***

Cho một đồ thị vô hướng G = (V, E), một phép tô k màu của đồ thị G là một hàm c : V → {0, 1, ..., k - 1} sao cho c(u) ≠ c(v) với mọi cạnh (u, v) ∈ E. Nói cách khác, các số 0, 1, ..., k-1 thể hiện k màu, và các đỉnh kề nhau phải có màu khác nhau.

* 1. Chứng minh rằng mọi cây là có thể tô được bằng 2 màu.
  2. Chứng minh rằng những phát biểu sau là tương đương:

1. G là phân đôi
2. G có thể tô được bằng 2 màu.
3. G không có chu trình độ dài lẻ nào.
   1. Cho d là bậc cực đại của mọi đỉnh trong đồ thị G. Chứng minh rằng G có thể tô được bằng k + 1 màu.
   2. Chứng minh rằng nếu G có O(|V|) cạnh thì G có thể đuợc tô màu bằng O() màu.

***B-2 Đồ thị bạn***

Hãy viết lại mỗi phát biểu sau thành một định lý về đồ thị vô hướng và chứng minh chúng. Giả sử rằng quan hệ bạn bè là đối xứng nhưng không phản xạ.

1. Trong nhóm bất kỳ gồm n ≥ 2 người, có hai người có cùng số bạn bè trong nhóm.
2. Mọi nhóm 6 người chứa chứa 3 người bạn thân lẫn nhau hoặc ba người không quen biết lẫn nhau.
3. Mọi nhóm người có thể phân chia thành hai nhóm sao cho ít nhất một nửa số người thuộc nhóm con trong đó người đó không phải là một thành viên.
4. Nếu mọi người trong một nhóm là bạn của ít nhất một nửa số người trong nhóm thì nhóm đó có thể bố trí cho ngồi quanh bàn theo cách mọi người đều ngồi giữa hai người bạn.

***B-3 Cây chia đôi***

Nhiều thuật toán “chia và chiến thắng” thực hiện trên các đồ thị cần đồ thị được chia thành hai đồ thị con kích thước gần bằng nhau, nó được quy vào bởi một phân hoạch các đỉnh. Bài toán này khảo sát sự phân đôi của các cây được tạo thành bằng cách loại một số lượng nhỏ các cạnh. Chúng ta cần bất cứ khi nào hai đỉnh kết thúc trong cây con sau khi các cạnh được xoá thì chúng phải trong cùng một phân hoạch.

* 1. Chứng minh bằng cách loại bỏ một cạnh đơn, chúng ta có thể phân chia các đỉnh của cây nhị phân n đỉnh bất kỳ thành hai tập A và B sao cho |A| ≤ 3n/4 và |B| ≤ 3n/4.
  2. Chứng minh rằng hằng số 3/4 trong phần (a) là tối ưu trong trường hợp xấu nhất bằng cách cho một ví dụ về một cây nhị phân đơn giản mà phần được cân bằng nhau nhất trong số các cách loại bỏ một cạnh đơn có |A| = 3n/4.
  3. Chứng minh rằng bằng cách loại bỏ nhiều nhất là O(lg n) cạnh, chúng ta có thể phân chia các đỉnh của một cây nhị phân n đỉnh bất kỳ thành hai tập A và B sao cho |A| = [n/2] và |B| = [n/2].

**C. Phép đếm và xác suất**

Chương này sẽ điểm lại lý thuyết xác suất và tổ hợp cơ sở. Nếu bạn đã có kiến thức tốt về những vấn đề này, bạn có thể sẽ muốn đọc lướt qua phần mở đầu của chương một cách nhẹ nhàng và tập trung vào những phần sau. Phần lớn của chương không cần lý thuyết xác suất, nhưng đối với một vài chương nó rất quan trọng.

Phần C.1 điểm lại các kết quả cơ bản trong lý thuyết thống kê, bao gồm các công thức cơ bản về đếm các hoán vị và tổ hợp. Các bổ đề của xác suất và basic fact liên quan đến phân phối xác suất được giới thiệu trong phần C.2. Các biến ngẫu nhiên được giới thiệu trong phần C.3, cùng với các tính chất của kỳ vọng và biến. Phần C.4 khảo sát phân phối nhị thức và phân phối hình học được nảy sinh từ việc nghiên cứu của các phép thử Bernoulli. Nghiên cứu phân phối nhị thức được tiếp tục trong phần C.5, và phần nâng cao của phần còn lại của phân phối.

***C.1 Phép đếm***

Lý thuyết về phép đếm cố gắng trả lời câu hỏi “có bao nhiêu?” mà không cần tính thức sự bao nhiêu. Ví dụ, chúng ta có thể muốn biết “Có bao nhiêu số nhị phân n bít khác nhau?” hoặc “Có bao nhiêu cách sắp xếp n phần tử phân biệt?” Trong phần này, chúng ta sẽ xem lại các thành phần cơ bản của lý thuyết đếm. Vì một vài trong một số phần có nhắc lại các kiến thức cơ bản về tập hợp, độc giả được khuyên nên bắt đầu bằng việc xem trước phần B.1.

***Quy tắc của tổng và tích***

Một tập hợp các vật chúng ta muốn đếm có thể đôi khi được biểu diễn như một tổ hợp của các tập tách rời nhau hoặc một lớp các tích Đề-các của các tập.

Quy tắc tính tổng nói rằng số các cách để chọn một phần tử từ một trong hai tập tách rời nhau là tổng của lực lượng của các tập. Đó là, nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn tách rời nhau không có phần tử nào chung nhau, khi đó |A ∪ B| = |A| + |B|, nó được rút ra từ đẳng thức (B.3). Ví dụ, mỗi vị trí trên một biển số xe là một ký hoặc một chữ số. Vì vậy số khả năng cho mỗi vị trí là 26 + 10 = 36, vì có 26 lựa chọn nếu nó là một ký tự và 10 lựa chọn nếu nó là một chữ số.

Quy tắc tính tích nói rằng số các cách lựa chọn một cặp được sắp là số cách chọn phần tử đầu tiên nhân với số cách chọn phần tử thứ hai. Đó là, nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn thì |A × B| = |A| . |B|, nó là đẳng thức (B.4) đơn giản. Ví dụ, nếu mộtcửa hiệu bán kem đưa ra 28 hương vị kem và 4 lớp kem phía trên, số khả năng nước kem hoa quả với một muỗng kem và một lớp kem phía trên là 28.4 = 112.

***Xâu***

Một xâu trên một tập hữu hạn S là một dãy các phần tử của S. Ví dụ, có 8 xâu nhị phân độ dài 3.

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Đôi khi chúng ta gọi một xâu độ dài k là k-xâu. Một sâu con s’ của một xâu s là một dãy được sắp các phần tử liên tục của s. Một k-xâu con của một xâu là một xâu con độ dài k. Ví dụ, 010 là một 3-sâu con của xâu 01101001 (3-xâu con bắt đầu tại vị trí 4), nhưng 111 không phải là xâu con của 01101001.

Một 3-xâu trên một tập S có thể được xem như một phần tử của tích Đề-các Sk của k-tuple; do vậy, có |S|k xâu độ dài k. Ví dụ, số k-xâu nhị phân là 2k. Một cách trực giác, để xây dựng một k-xâu trên tập một n-tập, chúng ta có n cách để lấy phần tử đầu; với mỗi cách chọn này, chúng ta có n cách để lấy phần tử thứ hai; và cứ thể tiếp tục k lần. Cách xây dựng này dẫn tới tích lặp k: n.n...n = nk như số lượng k-xâu.

***Phép hoán vị***

Một hoán vị của một tập hữu hạn S là một dãy được sắp tất cả các phần tử của S, mỗi phần tử xuất hiện đúng một lần. Ví dụ, nếu S = {a, b, c}, có 6 hoán vị của S:

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Có n! hoán vị của một tập S gồm n phần tử, vì phần tử đầu tiên của dãy có thể được chọn bằng n cách, phần tử thứ hai bằng n-1 cách, phần tử thứ ba bằng n - 2 cách, và cứ thế tiếp tục.

Một k-hoán vị của S là một dãy thứ tự k phần tử của S, mà không có phần tử nào xuất hiện hai lần trong dãy. (Do vậy, một hoán vị bình thường chỉ là một n-hoán vị của một n-tập). 12 2-hoán vị của tập {a, b, c, d} là

ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc.

Số k-hoán vị của một n-tập là

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.1) |

vì có n cách chọn phần tử thứ nhất, n-1 cách chọn phần tử thứ hai, và cứ thế tiếp tục cho đến khi k phần tử được chọn, và phần tử cuối cùng là một cách chọn từ n-k+1 phần tử.

***Tổ hợp***

Một tổ hợp chập k của một n-tập S đơn giản là một k-tập con của S. Ví dụ, có 6 tổ hợp chập 2 của một 4-tập {a, b, c ,d}:

ab, ac, ad, bc, bd, cd.

(ở đây chúng ta sử dụng cách viết tắt ký hiệu 2-tập {a,b} bởi ab, và tương tự như vậy.) Chúng ta có thể xây dựng một tổ hợp chập k của một n-tập bằng cách chọn k phần tử phân biệt từ n-tập.

Số tổ hợp chập k của một n-tập có thể được biểu diễn như khái niệm của số -hoán vị của một n tập. Với mọi tổ hợp chập k, có tất cả k! hoán vị các phần tử của nó, mỗi trong số chúng là một k-hoán vị phân biệt của một n-tập. Do vậy, số tổ hợp chập k của một n-tập là số k-hoán vị chia cho k! từ đẳng thức (C.1), đẳng thức này là

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.2) |

Với k = 0, công thức này cho chúng ta biết rằng số cách chọn 0 phần tử từ một n-tập là 1 (chứ không phải là 0), vì 0! = 1.

***Các hệ số nhị thức***

Chúng ta sử dụng ký hiệu (đọc là “n chọn k”) để biểu thị số tổ hợp chập k của một tập n phần tử. Từ đẳng thức (C.2), chúng ta có



Công thức này đối xứng với k và n-k:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.3) |

Các số này cũng được biết như các hệ số nhị thức, vì chúng xuất hiện trong khai triển nhị thức:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.4) |

Một trường hợp đặc biệt của khai triển nhị thức xuất hiện khi x = y = 1:



Công thức này tương đương với việc đếm 2n xâu nhị phân độ dài n bởi số các số 1 mà chúng chứa: có xâu nhị phân độ dài n chứa chính xác k số 1, vì có  cách chọn k vị trí trong số n vị trí để đặt số 1.

Có nhiều đồng nhất thức liên quan đến các hệ số nhị phân. Các bài tập cuối phần này cho bạn nhiều cơ hội chứng minh một vài trong số đó.

***Các giới hạn nhị thức***

Đôi khi chúng ta cần giới hạn kích thước của hệ số nhị phân. Với 1 ≤ k ≤ n, chúng ta có cận dưới





Từ việc áp dụng bất đẳng thức k! ≥ (k/e)k nhận được từ xấp xỉ Stirling (3.17), chúng ta nhận được cận trên



|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.5) |

Với mọi 0 ≤ k ≤ n, chúng ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp (xem bài tập C.1-12) để chứng minh cận

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.6) |

Trong đó để cho hợp lý chúng ta giả sử rằng 00 = 1. Với k = λn, ở đó 0 ≤ λ ≤ 1, cận dưới này có thể được viết lại





trong đó

|  |  |
| --- | --- |
| H(λ) = - lg λ - (1 - λ)lg(1-λ) | (C.7) |

là hàm entropy (nhị phân) và cho hợp lý chúng ta giả sử rằng 0lg0 = 0, vì vậy H(0) = H(1) = 0.

**Bài tập**

***C.1-1***

Một xâu độ dài n có bao nhiêu xâu con? (Coi các xâu con giống nhau độ dài k tại các vị trí khác nhau là khác nhau). Một xâu độ dài n có tất cả bao nhiêu xâu con?

***C.1-2***

Một hàm boolean đầu vào kích thước n, đầu ra kích thước m là một hàm từ {TRUE, FALSE}n đến {TRUE, FALSE}m. Có bao nhiêu hàm đầu vào kích thước n, đầu ra kích thước 1? Có bao nhiêu hàm đầu vào kích thước n, đầu ra kích thước m?

***C.1-3***

Có bao nhiêu cách sắp xếp n giáo sư ngồi quanh một bàn tròn hội nghị? Hai cách sắp xếp là như nhau nếu một cách có thể có được từ cách kia bẳng cách một phép quay.

***C.1-4***

Có bao nhiêu cách chọn từ tập {1, 2, ..., 100} ba số phân biệt sao cho tổng của chúng là chẵn?

***C.1-5***

Chúng minh đồng nhất thức

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.8) |

với 0 < k ≤ n.

***C.1-6***

Chứng minh đồng nhất thức



với 0 ≤ k < n.

***C.1-7***

Để chọn k vật từ n vật, bạn có thể tạo một vật thể phân biệt và xét xem vật phân biệt đó có được chọn hay không. Hãy dùng cách tiếp cận này để chứng minh rằng



***C.1-8***

Sử dụng kết quả của bài C.1-7, và tạo một bảng cho n = 0, 1, ..., 6 và 0 ≤ k ≤ n của các hệ số nhị thức  với  ở trên cùng,  và  ở dòng tiếp theo, và cứ thế tiếp tục. Bảng các hệ số nhị thức như vậy được gọi là tam giác Pascal.

***C.1-9***

Chứng minh rằng



***C.1-10***

Chỉ ra rằng với mọi n ≥ 0 và 0 ≤ k ≤ n, giá trị cực đại của  đạt được khi k = ⎣n/2⎦ hoặc k = ⎡n/2⎤.

***C.1-11★***

Chứng minh rằng với mọi n ≥ 0, j ≥ 0, k ≥ 0, và j + k ≤ n,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.9) |

Hãy cho hai chứng minh bằng đại số và tham số dựa trên một phương pháp chọn j + k phần tử từ n phần tử. Cho một ví dụ mà đẳng thức xảy ra.

***C.1-12 ★***

Sử dụng phương pháp quy nạp với k ≤ n/2 để chứng minh bất đẳng thức (C.6), và sử dụng đẳng thức (C.3) để mở rộng kết quả cho mọi k ≤ n.

***C.1-13 ★***

Hãy sử dụng xấp xỷ Stirling để chứng minh rằng

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.10) |

***C.1-14 ★***

Bằng cách đạo hàm hàm entropy H(λ), chỉ ra rằng nó đạt được cực đại tại λ = 1/2. Hãy cho biết giá trị của H(1/2).

***C.1-15 ★***

Chỉ ra rằng với mọi n ≥ 0,

|  |  |
| --- | --- |
| . | (C.11) |

***C.2 Xác suất***

Xác suất là một công cụ cơ bản cho thiết kế và phân tích các thuật toán ngẫu nhiên và xác suất. Phần này sẽ xem lại lý thuyết xác suất cơ bản.

Chúng ta định nghĩa xác suất theo nghĩa không gian thử S, đó là một tập các phần tử của nó được gọi là biến cố cơ bản. Mỗi biến cố cơ bản có thể được xem như một kết quả có thể của thí thực nghiệm.Với thực nghiệm gieo 2 đồng tiền phân biệt, chúng ta có thể xem không gian thử như một tập S của tất cả các xâu độ dài 2 có thể có trên tập ký tự {H, T}

S = {HH, HT, TH, TT}.

Một biến cố là một tập con của không gian thử S. Ví dụ, trong thí nghiệm gieo hai đồng tiền, biến cố đạt được một mặt ngửa (head) và một mặt sấp (tail) là {HT}. Biến cố S được gọi là biến cố chắc chắn, và biến cố ∅ được gọi là biến cố không bao giờ xảy ra. Chúng ta nói rằng hai biến cố A và B là phân biệt nếu A ∩ B = ∅. Đôi khi chúng ta coi mỗi biến cố cơ bản s ∈ S như biến cố {s}. Do định nghĩa, tất cả các biến cố cơ bản là phân biệt.

***Các tiên đề xác suất***

Một phân phối xác suất (probability distribution) Pr{} trên không gian thử S là một ánh xạ từ các biến cố của S tới các số thực sao cho các tiên đề xác suất sau được thoả mãn:

1. Pr{A} ≥ 0 với mọi biến cố A.
2. Pr{S} = 1.
3. Pr{A ∪ B} = Pr{A} + Pr{B} với mọi biến cố phân biệt A và B. Một cách tổng quát hơn, với mọi dãy (hữu hạn hoặc vô hạn đếm được) các biến cố A1, A2, ... đôi một phân biệt với nhau



Chúng ta gọi Pr{A} là xác suất của biến cố A. Chúng ta lưu ý ở đây rằng tiên đề 2 là một yêu cầu chuẩn: không có sự dư thừa nào khi chọn 1 là xác suất của một biến cố chắc chắn, ngoại trừ rằng nó là tự nhiên và hợp lý.

Một vài kết quả sau đây từ những tiên đề này và lý thuyết tập hợp cơ bản (xem phần B.1). Biến cố không thể ∅ có xác suất Pr{∅} = 0. Nếu A ⊆ B thì Pr{A} ≤ Pr{B}. Sử dụng  để ký hiệu biến cố S – A (phần bù của A), chúng ta có Pr{} = 1 – Pr{A}. Với 2 biến cố A và B tuỳ ý,

|  |  |
| --- | --- |
| Pr{A ∪ B} = Pr{A} + Pr{B} – Pr{A ∩ B}  ≤ Pr{A} + Pr{B} | (C.12)  (C.13) |

Trong ví dụ gieo đồng xu, giả sử rằng mỗi một trong số 4 biến cố cơ bản có xác suất 1/4. Khi đó xác suất lấy được ít nhất một mặt ngửa là

Pr{HH, HT, TH} = Pr{HH} + Pr{HT} + HT{TH}

= 3/4

Một cách khác, vì xác suất lấy được ít hơn một mặt ngửa là Pr{TT} = 1/4, xác suất lấy được ít nhất một mặt ngửa là 1 – 1/4 = 3/4.

***Phân phối xác suất rời rạc***

Một phân phối xác suất là rời rạc nếu nó được định nghĩa trên một không gian thử hữu hạn hoặc vô hạn đếm được. Cho S là một không gian thử. Khi đó với mọi biến cố A,



vì các biến cố cơ bản, đặc biệt các biến cố trong A, là phân biệt. Nếu S là hữu hạn và mọi biến cố cơ bản s ∈ S có xác suất

Pr{s} = 1/|S|

thì chúng ta có phân phối xác suất chuẩn trên S. Trong trường hợp như vậy thử nghiệm thường được mô tả như là “lấy ngẫu nhiên một phần tử của S”.

Ví dụ, xét quá trình reo một đồng chất, xác suất để có được mặt ngửa cũng bằng xác suất để có được mặt sấp, đó là 1/2. Nếu chúng ta reo n lần, chúng ta có phân phối xác suất chuẩn được định nghĩa trên không gian thử S = {H, T}n, một tập kích thước 2n. Mỗi biến cố cơ bản là S có thể được biểu diễn như là một xâu độ dài n trên tập ký hiệu {H, T}, và mỗi lần xảy ra với xác suất 1/2n. Biến cố

A = {có đúng k lần xuất hiện mặt sấp và n – k lần xuất hiện mặt ngửa}

là một tập con của S kích thước |A| = , vì có xâu độ dài n trên tập ký hiệu {H, T} chứa chính xác k ký hiệu H. Như vậy xác suất của biến cố A là Pr{A} = /2n.

***Phân phối xác suất chuẩn liên tục***

Phân phối xác suất chuẩn liên tục là một ví dụ của một phân phối xác suất trong đó không phải tất cả các tập con của không gian thử được xét là các biến cố. Phân phối xác suất chuẩn liên tục được định nghĩa trên một đoạn liên tục [a, b] các số thực, trong đó a < b. Một cách trực giác, chúng ta muốn mỗi điểm trong đoạn [a, b] là “gần như tương đương nhau”. Tuy nhiên có một số không đếm được các điểm, vì vậy nếu chúng ta cho tất cả các điểm một hữu hạn như nhau, xác suất dương, chúng ta không thể thoả mãn các tiên đề 2 và 3 một cách đồng thời. Vì lý do này, chúng ta cần liên kết xác suất chỉ với một vài trong số các tập con của S mà bằng cách đó các tiên đề đều được thoả mãn cho các biến cố.

Với mọi khoảng đóng [c, d], ở đó a ≤ c ≤ d ≤ b, phân phối xác suất chuẩn liên tục định nghĩa xác suất của sự kiện [c, d] là



Lưu ý rằng với mọi điểm , xác suất của x là 0. Nếu chúng ta loại bỏ các điểm cuối của đoạn , chúng ta có một khoảng mở (c,d). Vì  = , tiên đề 3 cho chúng ta . Một cách tổng quát, tập các sự kiện cho phân phối xác suất liên tục là bất kỳ tập con nào của không gian thử  có thể đạt được bởi một tổ hợp đếm được hoặc hữu hạn các khoảng đóng và mở.

***Xác suất có điều kiện và độc lập***

Đôi khi chúng ta có một vài hiểu biết hạn chế về kết quả của một thí nghiệm. Ví dụ, giả sử rằng một anh bạn reo 2 đồng xu và nói cho bạn biết rằng ít nhất một trong các đồng tiền có mặt ngửa. Xác suất của khả năng cả hai đồng tiền đều mặt ngửa là bao nhiêu? Thông tin được đưa ra loại bỏ khả năng hai mặt đều sấp. Ba biến cố cơ bản còn lại là hầu như tương đương, vì vậy chúng ta kết luận rằng mỗi khả năng xảy ra với xác suất 1/3. Vì chỉ một trong số các biến cố cơ bản này có thể cho 2 mặt đều ngửa, câu trả lời cho câu hỏi của chúng ta là 1/3.

Xác suất có điều kiện công thức hoá khái niệm có biết trước về kết quả của một thí nghiệm. Xác suất có điều kiện của một biến cố A cho một biến cố B khác xảy ra được định nghĩa

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.14) |

Với . (Chúng ta đọc là “” như “xác suất của A với B đã được cho”.) Một cách trực giác, vì chúng ta đã cho rằng biến cố B xảy ra, biến cố A cũng xảy ra là . Đó là,  là tập các kết quả trong đó cả A và B đều xảy ra. Vì kết quả là một trong những biến cố cơ bản trong B, chúng ta chuẩn hoá xác suất của tất cả các biến cố cơ bản trong B bằng cách chia chúng cho , để cho chúng có tổng là 1. Vì vậy, xác suất điều kiện của A với B đã cho là tỷ số của giữa xác suất của biến cố và xác suất của biến cố B. Trong ví dụ ở trên, A là biến cố cả hai đồng xu đều là mặt ngửa, và B là biến cố ít nhất một đồng xu là mặt ngửa. Do vậy, .

Hai biến cố là độc lập nếu

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.15) |

nếu , điều này tương đương với



như ví dụ, giả sử rằng cặp hai đồng tiền được gieo và kết quả là độc lập. Khi đó xác suất hai mặt đều ngửa là . Bây giờ giả sử rằng một biến cố là xuất hiện mặt ngửa và biến cố còn lại là đồng tiền kia xuất hiện với mặt khác. Mỗi biến cố trong những biến cố này xảy ra với xác suất 1/2, và xác suất cả hai sự kiện xảy ra là 1/4; do vậy, theo định nghĩa về tính độc lập, các biến cố là độc lập – mặc dù rằng một người có thể nghĩ rằng cả hai biến cố phụ thuộc vào đồng tiền đầu tiên. Cuối cùng, giả sử rằng các đồng tiền được xâu với nhau để chúng rơi có cả hai mặt đều sấp hoặc ngửa và hai khả năng là hoàn toàn như nhau. Khi đó xác suất mỗi mặt có mặt ngửa là 1/2, nhưng xác suất cả hai đồng xu đều là mặt ngửa là . Do đó, biến cố một đồng xu có mặt ngửa và biến cố đồng xu khác có mặt ngửa là không độc lập.

Một nhóm các biến cố được gọi là đôi một độc lập nếu



với mọi . Chúng ta nói rằng các biến cố của nhóm là độc lập nếu mọi k-tập , ở đó và  của nhóm thoả mãn



Ví dụ, giả sử chúng ta gieo hai đồng tiền giống nhau. Cho A1 là biến cố đồng tiền đầu tiên có mặt ngửa, A2 là biến cố đồng tiền thứ hai là mặt ngửa, và A3 là biến cố hai đồng tiền là khác nhau. Chúng ta có



Vì với , chúng ta có , các biến cố A1, A2, và A3 là đôi một độc lập. Tuy nhiên, các biến cố là không thực sự độc lập bởi vì  và .

***Định lý Bayes***

Từ định nghĩa xác suất có điều kiện (C.14) và tính chất giao hoán , nó kéo theo hai biến cố A và B, với xác suất khác không

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.16) |

Chia hai vế cho Pr{A|B} chúng ta có

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.17) |

Nó được biết như định lý Bayes. Mẫu số Pr{B} là một hằng số chuẩn mà chúng ta có thể biểu diễn lại như sau. Vì B = (B ∩ A) ∪ (B ∩ ) và B ∩ A và B ∩  là các biến cố phân biệt lẫn nhau,



.

Thay vào phương trình (C.17), chúng ta đạt được một dạng tương đương của định lý Bayes



Định lý Bayes có thể đơn giản hoá việc tính xác suất. Ví dụ, giả sử rằng chúng ta có một đồng xu đồng chất và một đồng xu bị xiên chéo có xu hướng luôn xuất hiện mặt ngửa. Chúng ta tiến hành thí nghiệm bao gồm ba biến cố độc lập: một trong hai đồng xu được chọn ngẫu nhiên, đồng xu được gieo một lần, và khi đó nó được gieo tiếp tục một lần nữa. Giả sử rằng đồng xu được chọn có mặt ngửa cả hai lần. Tính xác suất nó là đồng xu bị xiên.

Chúng ta giải quyết bài toán bằng cách dùng định lý Bayes. Cho A là biến cố đồng xu bị xiên được chọn, và B là biến cố đồng xu có mặt ngửa cả hai lần. Chúng ta cần xác định . Chúng ta có Pr{A} = 1/2, Pr{B | A} = 1, Pr{} = 1/2, và  = 1/4; do đó



= 4/5

***Bài tập***

***C.2-1***

Chứng minh bất đẳng thức Bool: với mọi dãy vô hạn đếm được hoặc hữu hạn bất kỳ các biến cố 

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.18) |

***C.2-2***

Một người gieo một đồng xu đồng chất một lần. Một người khác gieo một đồng xu đồng chất hai lần. Tính xác suất để người đầu tiên gieo có nhiều mặt ngửa hơn người thứ hai.

***C.2-3***

Một bộ 10 lá bài, mỗi lá mang một số phân biết từ 1 tới 10, được cháo một cách kỹ lưỡng. Rút lần lượt ba quan bài từ bộ bài. Tính xác suất ba lá được chọn theo thứ tự được sắp xếp?

***C.2-4 ★***

Mô tả một phương pháp lấy đầu vào là hai số nguyên a và b sao cho 0 < a < b, và sử dụng gieo đồng xu đồng chất sinh ra kết quả là mặt ngửa với xác suất a/b và mặt sấp với xác suất (b-a)/b. Hãy cho một giới hạn trên cho số lượng mong muốn các lần gieo đồng xu, nó có thể là *O*(1). (Chỉ dẫn: Biểu diễn a/b dạng nhị phân.)

***C.2-5***

Chứng minh rằng

.

***C.2-6***

Chứng minh rằng với tập các biến cố 





***C.2-7 ★***

Hãy chỉ ra cách để xây dựng một tập n biến cố đôi một độc lập với nhau nhưng không tập con kích thước k > 2 nào là độc lập.

***C.2-7 ★***

Hai biến cố A và B là độc lập có điều kiện C nếu



Hãy cho một ví dụ đơn giản nhưng không tầm thường của hai biến cố không độc lập nhưng là độc lập với điều kiện thứ ba được cho.

***C.2-9 ★***

Bạn là một người chơi trong một trò chơi trong đó một giải thưởng được giấu đằng một trong số ba bức màn. Bạn sẽ lấy được giải thưởng nếu bạn chọn đúng bức màn. Sau khi bạn chọn một bức màn nhưng trước khi bức màn được nhấc lên, người chủ trò sẽ nhấc một trong các bức màn khác, biết rằng nó không có gì cả, và hỏi bạn có muốn chuyển từ bức màn bạn chọn sang bức màn còn lại hay không. Các cách chọn của bạn sẽ như thế nào nếu bạn chọn chuyển cách chọn?

***C.2-10 ★***

Một người cai ngục chọn một cách ngẫu nhiên một người tù trong số 3 người tù để thả tự do. Hai người còn lại sẽ bị xử tử. Người bảo vệ biết người nào sẽ được tự do nhưng bị cấm đưa cho bất cứ người tù nào về thông tin bất kể tình trạng của anh ta. Chúng ta gọi những người tù là X, Y, và Z. Người tù X hỏi riêng người bảo vệ xem người nào trong hai người Y và Z sẽ bị xử tử, quả quyết rằng vì anh ta đã biết rằng ít nhất một người trong số họ sẽ phải chết, người bảo vệ sẽ không tiết lộ bất cứ thông tin nào về tình trạng của anh ta. Người bảo vệ nói với X rằng Y sẽ bị xử tử. Người tù X cảm thấy vui vẻ vì anh ta thấy rằng hoặc anh ta hoặc người tù Z sẽ được tự do, điều đó có nghĩa là xác suất của anh ta được thả là 1/2. Anh ta có đúng không, hay cơ hội của anh ta vẫn là 1/3? Hãy giải thích.

***Biễn ngẫu nhiên***

Biến ngẫu nhiên X là một hàm từ một không gian thử hữu hạn hoặc vô hạn đếm được tới các số thực. Nó gắn mỗi số thực với một kết quả có thể của thí nghiệm, nó cho phép chúng ta thực hiện với phân phối xác suất trên tập kết quả của các số. Các biến ngẫu nhiên cũng có thể được định nghĩa cho các không gian thử vô hạn hữu hạn không đếm được, nhưng chúng phát sinh các vấn đề mang tính kỹ thuật không cần thiết cho mục đích của chúng ta. Do đó, chúng ta giả sử rằng các biến ngẫu nhiên là phân biệt.

Với một biến ngẫu nhiên X và một số thực x, chúng ta định nghĩa biến cố X = x là ; do đó



Hàm  là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X. Từ tiên đề xác suất,  và .

Như ví dụ, xét thí nghiệm gieo một cặp con súc sắc 6 mặt. Có 36 biến cố cơ bản có thể trong không gian phép thử. Chúng ta giả sử rằng phân phối xác suất là chuẩn sao cho mỗi biến cố cơ bản là hầu như tương đương: . Định nghĩa biến cố ngẫu nhiên X là cực đại của hai giá trị trên con súc sắc. Chúng ta có , vì X được gán một trong các giá trị từ 3 tới 5 trong số 36 biến cố cơ bản có thể, (1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2) và

(3, 1).

Một vài biến ngẫu nhiên được định nghĩa trên cùng một không gian phép thử. Nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên, hàm



là hàm mật độ xác suất kết hợp của X và Y. Với một giá trị cố định *y*,



và tương tự, với một giá trị cố định *x*,



Sử dụng định nghĩa (C.14) cho xác suất điều kiện, chúng ta có 

Chúng ta định nghĩa hai biến ngẫu nhiên X và Y là độc lập nếu với mọi x và y, các biến cố X = x và Y = y là độc lập hay một cách tương đương, nếu với mọi x và y, chúng ta có .

Cho một tập các biến ngẫu nhiên được định nghĩa trên không gian phép thử, người ta có thể định nghĩa các biến ngẫu nhiên mới như tổng, tích, hay các hàm khác của các biến cơ bản.

***Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên***

Tổng có ích nhất và đơn giản nhất của phân phối một biến ngẫu nhiên là trung bình của các giá trị nó chiếm giữ. Kỳ vọng (hay một cách tương đương) của một biến ngẫu nhiên X là

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.19) |

được định nghĩa nếu tổng là hữu hạn hoặc hội tụ tuyệt đối. Đôi khi kỳ vọng của X được ký hiệu bởi hay bởi , khi ý nghĩa biến ngẫu nhiên đã quá rõ ràng.

Xét một trò chơi trong đó bạn gieo hai đồng xu đồng chất. Bạn kiếm $3 cho mỗi mặt ngửa nhưng mất $2 cho mỗi mặt sấp. Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X thể hiện số tiền bạn kiếm được là





Kỳ vọng của tổng của hai biến ngẫu nhiên là tổng của các kỳ vọng, đó là

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.20) |

Bất kỳ khi nào  và  được định nghĩa. Chúng ta gọi tính chất này là tính chất tuyến tính của kỳ vọng, và nó vẫn giữ nguyên nếu X và Y không độc lập. Nó cũng có mở rộng cho tổng hữu hạn và tổng hội tụ tuyệt đối của kỳ vọng. Tính chất tuyến tính của kỳ vọng là tính chất cơ bản cho phép chúng ta thực hiện các phân tích xác suất bằng cách sử dụng các biến ngẫu nhiên chỉ định (xem phần 5.2).

Nếu X là một biến ngẫu nhiên bất kỳ, hàm g(x) định nghĩa một biến ngẫu nhiên mới g(X). Nếu kỳ vọng của g(X) được định nghĩa, khi đó



Cho g(x) = ax, chúng ta có với một hằng số bất kỳ a,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.21) |

Do đó, các kỳ vọng là tuyến tính: với hai biến ngẫu nhiên bất kỳ X và Y và một hằng số a bất kỳ

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.22) |

Khi hai biến ngẫu nhiên X và Y là độc lập và mỗi biến có một kỳ vọng được định nghĩa





Trong trường hợp tổng quát, khi n biến ngẫu nhiên là độc lập,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.23) |

Khi một biến ngẫu nhiên X lấy các giá trị từ một tập các giá trị tự nhiên

, có một công thức cho kỳ vọng của nó



|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.24) |

vì mỗi được thêm vào *i* lần và từ đi i - 1 lần (ngoại trừ , nó được thêm vào 0 lần và không trừ đi cái nào cả).

Khi chúng ta áp dụng hàm lồi *f(x)* cho một biến ngẫu nhiên X, bất đẳng thức Jensen cho chúng ta

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.25) |

Cho chúng ta kỳ vọng tồn tại và hữu hạn. (Một hàm f(x) là lồi nếu với mọi x và y và với mọi , chúng ta có .)

***Phương sai và độ lệch tiêu chuẩn***

Kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên không cho chúng ta biết độ phân tán của các biến. Ví dụ, nếu chúng ta có các biến ngẫu nhiên X và Y với  và , khi đó cả  và là 1/2, lúc này các giá trị thực sự lấy trên Y là nhiều hơn giá trị trung bình hơn các giá trị thực sự lấy trên Y.

Khái niệm phương sai toán học cho thấy độ lệch so với giá trị trung bình mà các giá trị của một biến ngẫu nhiên có. Phương sai của một biến ngẫu nhiên X với giá trị trung bình  là



|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.26) |

Tính đúng đắn của các đẳng thức  và là  không phải là một biến ngẫu nhiên mà là một số thực, điều đó có nghĩa là đẳng thức (C.21) áp dụng (với ). Đẳng thức (C.26) có thể được viết lại để đạt được một biểu thức có kỳ vọng của bình phương của một biến ngẫu nhiên:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.27) |

Phương sai của một biến ngẫu nhiên X và phương sai của aX có liên quan (xem bài tập C.3-10):

.

Khi X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập,

.

Một cách tổng quát, nếu n biến ngẫu nhiên là đôi một độc lập, khi đó

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.28) |

Độ lệch tiêu chuẩn của một biến ngẫu nhiên X là căn bậc hai của phương sai của X. Đôi khi độ lệch tiêu chuẩn của một biến ngẫu nhiên X được ký hiệu bởi  hay một cách đơn giản  khi biến ngẫu nhiên X được hiểu theo ngữ cảnh. Với ký hiệu này, phương sai được ký hiệu bởi .

**Bài tập**

***C.3-1***

Gieo hai con súc sắc 6 mặt, giống nhau. Kỳ vọng của tổng của giá trị của hai mặt của hai con súc sắc là bao nhiêu? Kỳ vọng của cực đại của giá trị của hai mặt của hai con súc sắc là bao nhiêu?

***C.3-2***

Một mảng  chứa n số phân biệt được sắp xếp theo thứ tự ngẫu nhiên, với mỗi hoán vị của n giá trị là hoàn toàn tương đương. Tính kỳ vọng của chỉ số của phần tử cực đại trong dãy, kỳ vọng của chỉ số của phần tử nhỏ nhất trong dãy.

***C.3-3***

Trò chơi carnival bao gồm 3 con súc sắc trong một cái hộp. Một người chơi đặt cược cho bất kỳ số nào từ 1 đến 6 một đô la. Chiếc hộp được lắc, và phần thưởng là như sau. Nếu số của người chơi không xuất hiện trên con súc sắc nào, anh ta mất tiền. Ngược lại, nếu số của anh ta xuất hiện k lần trên ba con súc sắc, với , anh ta giữ lấy tiền của anh ta và được thêm  đô la nữa. Kỳ vọng của anh ta đạt được khi chơi trò carnival một lần là bao nhiêu.

***C.3-4***

Chỉ ra rằng nếu và là các biến ngẫu nhiên không âm thì



***C.3-5 ★***

Cho và là các biến ngẫu nhiên độc lập. Chứng minh rằng  và  là độc lập với bất kỳ hàm  và  nào.

***C.3-6 ★***

Cho X là một biến ngẫu nhiên không âm với kỳ vọng . Chứng minh bất đẳng thức Markov

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.29) |

với mọi .

***C.3-7 ★***

Cho S là một không gian thử, và cho  và  là các biến ngẫu nhiên sao cho  với mọi . Chứng minh rằng với mọi hằng số thực ,

.

***C.3-8***

Cái nào lớn hơn: Kỳ vọng của bình phương của một biến ngẫu nhiên, hay bình phương kỳ vọng của nó?

***C.3-9***

Chỉ ra rằng với mọi biến ngẫu nhiên chỉ lấy các giá trị 0 và 1, chúng ta có .

***C.3-10***

Chứng minh rằng từ định nghĩa (C.26) của phương sai.

***C.4 Phân phối hình học và phân phối nhị thức***

Gieo một đồng xu là một thể hiện của phép thử Bernoulli, nó được coi như một thí nghiệm với hai kết quả có khả năng: thành công xuất hiện với xác suất , và thất bại với xác suất . Khi chúng ta nói phép thử Bernoulli chung chung, có nghĩa là phép thử là độc lập với nhau và trừ phi chúng ta một cách đặc biệt, mỗi phép thử có cùng xác suất thành công là . Hai phân phối quan trọng nảy sinh từ phép thử Bernoulli: phân phối hình học và phân phối nhị thức.

***Phân phối hình học***

Giả sử rằng chúng ta có một dãy phép thử Bernoulli, mỗi phép thử với xác suất thành công  và xác suất thất bại là . Cần thực hiên bao nhiêu phép thử trước khi chúng ta có một thành công? Cho biến ngẫu nhiênlà số phép thử cần thiết để đạt được một thành công. Khi đó có giá trị trong phạm vi  và với 

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.30) |

Vì chúng ta có  thất bại trước khi có một thành công. Một phân phối xác suất thoả mãn (C.30) được gọi là một phân phối hình học. Hình C.1 minh hoạ một phân phối như vậy.

Giả sử rằng , kỳ vọng của một phân phối hình học có thể được tính bằng cách sử dụng đồng nhất thức (A.8):

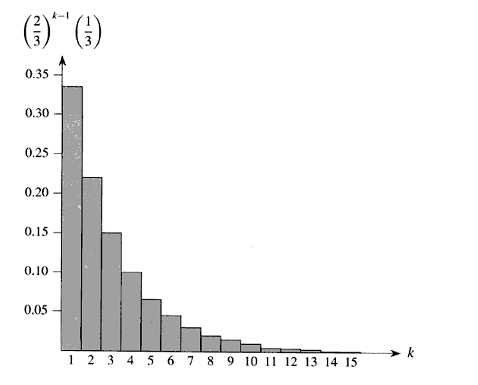


|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.31) |

Như vậy nói chung, cần phép thử trước khi chúng ta có một thành công, một kết quả trực giác. Phương sai, có thể tính một cách hoàn toàn tương tự, nhung sử dụng bài tập A.1-3, là

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.32) |

Như một ví dụ, giả sử chúng ta lăn hai con súc sắc cho đến khi chúng ta có được một tổng là bảy hoặc mười một. Trong 36 kết quả có thể, 6 kết quả cho kết quả là 7 và 2 kết quả cho kết quả là 11. Như vậy, xác suất thành công là , và chúng ta phải gieo  lần để có được một kết quả là bảy hoặc mười một.



**Hình C.1** Một phân phối hình học với xác suất  cho thành công và xác suất cho thất bại. Kỳ vọng của phân phối là .

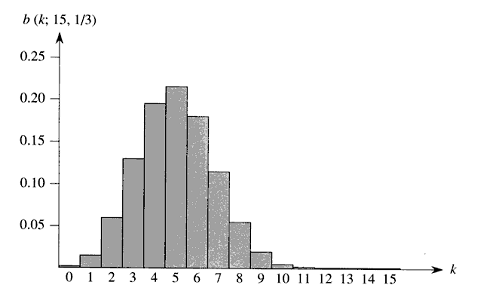
***Phân phối nhị thức***

Có bao nhiêu lần thành công trong  phép thử Bernoulli, trong đó một thành công xuất hiện với xác suất  và một thất bại với xác suất ? Ta dùng một biến ngẫu nhiên  là số thành công trong  phép thử. Khi đó  có giá trị trong  và với ,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.33) |

vì có cách để chọn ra *k* thành công trong  phép thử, và xác suất mỗi lần là . Một phân phối xác suất thoả mãn phương trình (C.33) được gọi là phân phối nhị thức. Để cho hợp lý, chúng ta định nghĩa họ phân phối nhị thức bằng cách sử dụng ký hiệu

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.34) |



**Hình C.2** Phân phối nhị thức  cho kết quả từ phép thử Bernoulli, mỗi phép thử với xác suất thành công . Kỳ vọng của phân phối là .

Hình C.2 minh hoạ một phân phối nhị thức. Tên “nhị thức” bắt nguồn từ thực tế là (C.33) là số hạng trong khai triển của . Do đó, vì ,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.35) |

như được yêu cầu bởi tiên đề 2 của tiên đề xác suất.

Chúng ta có thể tính kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức từ đẳng thức (C.8) và (C.35). Cho là một biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối nhị thức , và cho . Bởi định nghĩa kỳ vọng, chúng ta có



|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.36) |

Bằng cách sử dụng tính chất tuyến tính của kỳ vọng, chúng ta có thể có được kết quả tương tự về căn bản ít tính đại số hơn. Cho  là biến ngẫu nhiên mô tả số thành công trong phép thử thứ . Khi đó , và do tính chất tuyến tính của kỳ vọng (phương trình (C.20)), số kỳ vọng mong muốn trong  phép thử là



|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.37) |

Cách tiếp cận tương tự có thể được sử dụng để tính phương sai của phân phối. Sử dụng phương trình (C.26), chúng ta có . Vì  chỉ lấy trên các giá trị 0 và 1, chúng ta có , và do đó

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.38) |

Để tính phương sai của X, chúng ta sử dụng tính độc lập của  phép thử, do đó do phương trình (C.28),



|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.39) |

Như có thể thấy từ hình C.2, phân phối nhị thức tăng khi chạy từ 0 đến  cho đến khi nó đạt tới giá trị trung bình , và khi đó nó lại giảm. Chúng ta có thể chứng minh rằng phân phối luôn luôn có cách đối xử như vậy bằng cách xem tỷ lệ của các toán hạng thành công





|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.40) |



Tỷ lệ này lớn hơn 1 khi  là dương. Do đó,  với (phân phối tăng), và với  (phân phối giảm). Nếu  là một số nguyên, thì , vì vậy phân phối có hai cực đại: tại  và tại . Ngược lại, nó đạt được một cực đạ tại một số nguyên nằm trong phạm vi .

Bổ đề sau cho một cận trên của phân phối nhị thức

***Bổ đề C.1***

Cho , , , và . Khi đó



***Chứng minh:***

Sử dụng phương trình (C.6), chúng ta có





|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

***Bài tập***

***C.4-1***

Chứng minh tiên đề thứ 2 của tiên đề xác suất cho phân phối hình học.

***C.4-2***

Nói chung**, c**húng ta phải gieo bao nhiêu lần 6 đồng xu như nhau để có được 3 mặt ngửa và 3 mựat sấp.

***C.4-3***

Chứng minh rằng , trong đó .

***C.4-4***

Chứng minh rằng giá trị cực đại của phân phối nhị thức  xấp xỉ , trong đó .

***C.4-5 ★***

Chứng minh rằng xác suất không thành công lần nào trong  phép thử Bernoulli, mỗi lần với xác suất  là xấp xỉ . Chứng minh rằng xác suất của một lần thành công là xấp xỉ .

***C.4-6 ★***

Một người gieo một đồng xu n lần, và một người khác nữa cũng làm tương tự như vậy. Chứng minh rằng xác suất họ có được cùng một số mặt ngửa là . (Chỉ dẫn: với người thứ nhất, coi thành công là một mặt ngửa; với người thứ hai, coi thành công là một mặt sấp.) Sử dụng lý luận của bạn để chứng minh đồng thất thức

.

***C.4-7 ★***

Chứng minh rằng với ,



trong đó là hàm entropy (C.7).

***C.4-8 ★***

Xét  phép thử Bernoulli, trong đó với , phép thử thứ i có xác suất thành công là , và cho  là biến ngẫu nhiên ký hiệu tổng số thành công. Cho với . Chứng minh rằng với ,



***C.4-9 ★***

Cho  là biến ngẫu nhiên cho tổng số thành công trong một tập  gồm  phép thử Bernoulli, ở đó phép thử thứ có xác suất thành công là , và cho là biến ngẫu nhiên cho tổng số thành công trong một tập thứ hai  gồm  phép thử Bernoulli, trong đó phép thử thứ có xác suất thành công là . Chứng minh rằng với ,



(Chỉ dẫn: Chỉ ra cách để đạt được phép thử Bernoulli trong  bằng một thực nghiệm liên quan đến các phép thử của , và sử dụng kết quả của bài tập C.3-7.)

***★ C.5 Phần còn lại của phân phối nhị thức***

Xác suất của việc có ít nhất, hoặc nhiều nhất k thành công trong phép thử Bernoulli, mỗi thành công có xác suất , thường đáng quan tâm hơn xác suất có chính xác  thành công. Trong phần này, chúng ta khảo sát phần còn lại của phân phối nhị thức: hai vùng của phân phối  cách khá xa so với giá trị trung bình . Chúng ta sẽ chứng minh một vài giới hạn quan trọng trên (tổng số tất cả các số hạng) phần còn lại.

Trước tiên chúng ta đưa ra một giới hạn của phần bên phải của phân phối . Giới hạn của phần bên trái có thể được xác định bằng cách đảo ngược vai trò của thành công và thất bại.

***Định lý C.2***

Xét một dãy  phép thử Bernoulli, trong đó thành công xuất hiện với xác suất . Cho là biến ngẫu nhiên ký hiệu tổng số lần thành công. Khi đó với , xác suất xuất hiện ít nhất lần thành công là



.

***Chứng minh:***

Với , chúng ta ký hiệu  là biến cố phép thử thứ  là thành công với mọi . Rõ ràng là  nếu . Chúng ta có





trong đó bất đẳng thức được suy ra từ bất đẳng thưc Boole (C.18)

Hệ quả sau phát biểu lại định lý cho phần bên trái của phân phối nhị thức. Nói chung, chúng ta sẽ để chúng lại cho độc giả phần chứng minh từ phần này tới phần khác.

***Hệ quả C.3***

Xét một dãy  phép thử Bernoulli, trong đó thành công xuất hiện với xác suất . Nếu là biến ngẫu nhiên ký hiệu tổng số lần thành công, thì với , xác suất có ít nhất  thành công là





Giới hạn trên kế tiếp của chúng ta liên quan đến phần bên trái của phân phối nhị thức. Hệ quả của nó cho thấy rằng, khá xa so với giá trị trung bình, phần bên trái hạ bớt phần mũ xuống.

***Định lý C.4***

Xét một dãy  phép thử Bernoulli, trong đó thành công xuất hiện với xác suất  và thất bại với xác suất . Cho  là biến ngẫu nhiên ký hiệu tổng số thành công. Khi đó với , xác suất xuất hiện ít hơn  lần thành công là





***Chứng minh:***

Chúng ta giới hạn chuỗi bằng một chuỗi hình học sử dụng phương pháp từ phần A.2. Với , chúng ta có từ bất đẳng thức (C.40)







Nếu chúng ta ký hiệu











Nó kéo theo



với . áp dụng liên tiếp bất đẳng thức  lần, chúng ta có được



với

, và do đó









***Hệ quả C.5***

Xét một dãy  phép thử Bernoulli, trong đó thành công xuất hiện với xác suất  và thất bại với xác suất . Khi đó với , xác suất ít hơn  thành công là nhỏ hơn nửa xác suất ít hơn  thành công.

***Chứng minh:***

Vì , chúng ta có







vì . Cho  là biến ngẫu nhiên ký hiệu số thành công, định lý C.4 có nghĩa là xác suất ít hơn  thành công là



Như vậy chúng ta có







|  |  |
| --- | --- |
| Vì . |  |

Giới hạn của phần bên phải có thể được xác định một cách tương tự. Phần chứng minh được giành lại như bài tập C.5-2.

***Hệ quả C.6***

Xét một dãy  phép thử Bernoulli, trong đó thành công xuất hiện với xác suất . Cho là biến ngẫu nhiên ký hiệu tổng số thành công. Khi đó với , xác suất có hơn  thành công là



|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

***Hệ quả C.7***

Xét một dãy  phép thử Bernoulli, trong đó thành công xuất hiện với xác suất  và thất bại với xác suất . Khi đó với , xác suất xuất hiện hơn  lần thành công là nhỏ hơn một nửa xác suất của nhiều hơn  lần thành công.

Định lý tiếp theo xét  phép thử Bernoulli, mỗi phép thử với xác suất thành công là , với . Như một suy luận từ hệ quả cho thấy, chúng ta có thể sử dụng định lý có được giới

***Hệ quả C.8***

Xét một dãy  phép thử Bernoulli, trong đó trong phép thử thứ , với , thành công xuất hiện với xác suất  và thất bại xuất hiện với xác suất . Cho  là biến ngẫu nhiên mô tả số thành công, và . Khi đó với 

.

***Chứng minh:***

Vì với mọi , hàm tăng thật sự đối với ,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.41) |

trong đó  sẽ được xác định sau. Sử dụng bất đẳng thức Markov (C.29), chúng ta có được

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.42) |

Phần quan trọng của chứng minh bao gồm giới hạn  và thay thế một giá trị hợp lý cho  trong bất đẳng thức (C.42). Trước tiên, chúng ta tính giá trị của . Sử dụng ký hiệu trong phần 5.2, cho {phép thử Bernoullli thứ  là thành công} với ; đó là, là biến ngẫu nhiên đó là 1 nếu phép thử thứ  là thành công và 0 nếu nó là thất bại. Do vậy,



và do tính chất tuyến tính của kỳ vọng,



có nghĩa là



Để tính , chúng ta thay cho , chúng ta có được







nó kéo theo từ (C.23), vì tính độc lập lẫn nhau của các biến ngẫu nhiên  dẫn tới tính độc lập lẫn nhau của các biến ngẫu nhiên  (xem bài tập C.3-5). Do định nghĩa của kỳ vọng





|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.43) |



trong đó  ký hiệu hàm mũ: . (bất đẳng thức (C.43) được suy ra từ bất đẳng thức , và , và dòng cuối cùng suy ra từ bất đẳng thức (3.11)). Do đó







|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.44) |

vì . Vì vậy, từ phương trình (C.41) và bất đẳng thức (C.42) và (C.44), ta có

|  |  |
| --- | --- |
|  | (C.45) |

Chọn (xem bài tập C.5-7), chúng ta có được







|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Khi áp dụng phép thử Bernoulli trong đó mỗi phép thử có cùng xác suất thành công, định lý C.8 sinh ra hệ quả sau đây giới hạn phần bên phải của phân phối nhị thức

***Hệ quả C.9***

Xét một dãy  phép thử Bernoulli, trong đó thành công xuất hiện với xác suất  và thất bại với xác suất . Khi đó với 





Chứng minh:

|  |  |
| --- | --- |
| Do bất đẳng thức (C.36), chúng ta có . |  |

***Bài tập***

***C.5-1 ★***

Điều gì có khả năng ít xảy ra hơn: không có mặt ngửa nào khi bạn gieo một đồng xu  lần, hay đạt được ít hơn  mặt khi bạn gieo đồng xu  lần.

***C.5-2 ★***

Chứng minh hệ quả C.6 và C.7.

***C.5-3 ★***

Chứng minh rằng



với mọi  và mọi  sao cho .

***C.5-4 ★***

Chứng minh rằng nếu , ở đó  và  thì



***C.5-5 ★***

Chứng minh rằng điều kiện của định lý C.8 có nghĩa là



Hay tương đương, chỉ ra rằng điều kiện của định lý C.9 có nghĩa là



***C.5-6 ★***

Xét một dãy  phép thử Bernoulli, trong đó trong phép thử thứ , với , thành công xuất hiện với xác suất  và thất bại xuất hiện với xác suất . Cho  là biến ngẫu nhiên mô tả tổng số thành công, và cho . Chứng minh rằng với 



(Chỉ dẫn: chứng minh rằng . Sau đó theo lời chỉ dẫn của chứng minh của định lý C.8, sử dụng bất đẳng thức trong vị trí của bất đẳng thức (C.43).)

***C.5-7 ★***

Chứng minh rằng phía bên phải của bất đẳng thức (C.45) là cực tiểu hoá bằng cách chọn

.

**Bài toán**

***C-1 Những quả bóng và những chiếc thùng***

Trong vấn đề này, chúng ta khảo sát ảnh hưởng của những giả thiết khác nhau trên số cách đặt  quả bóng vào  thùng phân biệt.

1. Giả sử rằng  quả bóng là phân biệt và thứ tự của chúng cùng với những thùng chứa không phải là vấn đề. Hãy lập luận để thấy số cách đặt các quả bóng vào trong thùng là .
2. Giả sử rằng các quả bóng là phân biệt và các quả bóng trong mỗi thùng là có thứ tự. Chứng minh rằng có  cách để đặt các quả bóng vào trong các thùng. (*Chỉ dẫn*: Xét số cách sắp xếp  quả bóng phân biệt và cột không phân biệt vào một hàng.)
3. Giả sử rằng các quả bóng là như nhau, và do đó thứ tự của chúng cùng với một thùng chứa không phải là vấn đề. Chỉ ra rằng số các cách đặt các quả bóng vào các thùng là . (*Chỉ dẫn*: Theo cách sắp xếp trong phần (b), có bao nhiêu cách lặp lại nếu các quả bóng như nhau?)
4. Giả sử rằng các quả bóng là như nhau và rằng không thùng nào có thể chứa hơn một quả bóng. Chứng minh rằng số cách đặt các quả bóng là .
5. Giả sử rằng các quả bóng là như nhau và rằng không thùng nào để trống. Chứng minh rằng số các cách đặt các quả bóng là .

1. Một biến của một tập hợp có thể chứa cùng một phần tử hơn một lần, được gọi là siêu tập. [↑](#footnote-ref-1)
2. Một vài tác giả bắt đầu bằng đầu số tự nhiên bằng 1 thay vì bằng 0. Xu hướng hiện nay coi bắt đầu bằng 0. [↑](#footnote-ref-2)
3. để chính xác, để quan hệ “vừa bên trong” là quan hệ thứ tự một phần, chúng ta cần xem một hộp như là vừa với bản thân nó. [↑](#footnote-ref-3)